Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Secondo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **04/04/2017**

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico.*

1. *Dimostrare che X è T_0 se e solo se presi due punti $x \neq y \in X$, allora $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.*
2. *Sia definita in X una relazione $\sim$ nel modo seguente: $x \sim y$ se e solo se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e che lo spazio quoziente $X/\sim$ è uno spazio T_0.*

Esercizio 2. *Dimostrare che uno spazio topologico X è T_1 se e solo se ogni sottoinsieme di X è intersezione degli aperti che lo contengono.*

Esercizio 3. *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua tra spazi topologici e sia*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \,|\, x \in X\}.$$

Dimostrare che se Y è uno spazio di Hausdorff allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

Esercizio 4. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione delle rette $\{y = 0\}$ e $\{y = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ munito della topologia di sottospazio. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su X tale che $(x, 1) \sim (x, 0)$ per ogni $x \neq 0$. Sia $Y := X/\sim$ munito della topologia quoziente e sia $p : X \to Y$ la mappa di proiezione al quoziente. Dimostrare che:*

(i) p è una mappa aperta ma non chiusa;

(ii) Y è T_1 ma non è uno spazio di Hausdorff.

Esercizio 5. *Si consideri sull'lintervallo $I = [0, 1]$ una relazione di equivalenza $\sim$ che identifica i punti su un certo sub-intervallo (a, b), $(a, b]$ o $[a, b]$ di I, con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Si descriva in ogni caso lo spazio quoziente $X/\sim$, facendo riferimento alle proprietà di separazione che soddisfa.*

Esercizio 6. *Sia Z la retta reale munita della topologia avente per base gli insiemi della forma $S_a := (a, +\infty)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:*

(i) Z soddisfa il secondo assioma di numerabilità ed è separabile.

(ii) Z è T_0 ma non è T_1.

(iii) Su Z vale la tese del lemma di Uryshon.

Esercizio 7. *Uno spazio si dice di Tychonoff o completamente regolare se è uno spazio T_1 e se dati un chiuso $A \subset X$ e un punto $x \notin A$, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(A) = 1$.*

(i) Si dimostri che uno spazio normale è anche di Tychonoff e che uno spazio di Tychonoff è regolare.

(ii) Senza utilizzare (i), si dimostri che uno spazio metrizzabile è di Tychonoff.

(iii) Si dimostri che sottospazi e prodotti di spazi di Tychonoff è di Tychonoff.

(iv) Si dimostri che $\mathbb{R}_l^2$, dove $\mathbb{R}_l$ è l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey, è completamente regolare ma non è normale.

(v) Si dimostri che uno spazio T_1 è di Tychonoff se e solo se è omeomorfo a un sottospazio del cubo $[0,1]^J$ per un certo indice J.