Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Terzo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE ENTRO: **17/05/2017**

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico metrico completo e sia $\{D_n := \overline{D}_{r_n}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucessione di dischi chiusi tali che $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ e tale che $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Mostrare che $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$.*

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che:*

(i) L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$ e la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$ non sono localmente compatti.

(ii) Se $Y \subset X$ è un sottospazio chiuso di X e se X è paracompatto allora Y è paracompatto.

(iii) Se X é localmente compatto, di Hausdorff e N_2, allora X è paracompatto (suggerimento: utilizzare la Prop. 2 sulla Esercitazione 6).

(iv) Concludere che $\mathbb{R}$ è paracompatto.

Esercizio 3. *(i) Dimostrare che uno spazio compatto è numerabilmente compatto e che uno spazio compatto per sucessioni è numerabilmente compatto.*

(ii) Esibire un esempio di uno spazio numerabilmente compatto e che non è ne compatto ne compatto per sucessioni.

Esercizio 4. *Sia X uno spazio topologico completamente regolare. Si dimostri che se X è connesso se e solo se anche la sua compattificazione di Stone-Cech è connessa.*

Esercizio 5. *(i) Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso. Mostrare che X è connesso per archi.*

(ii) Mostrare che $\mathbb{R}^n \setminus L$, dove L è un sottospazio lineare di codimensione almeno 2 è connesso, mentre $\mathbb{R}^n \setminus H$ è sconnesso, dove H è un iperpiano di $\mathbb{R}^n$.

(iii) Concludere che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi se $n > 1$.

Esercizio 6. *Uno spazio topologico X si dice totalmente sconnesso se $\forall x \in X$, la componente connessa $C(x) = \{x\}$.*

(i) Osservare che uno spazio topologico totalmente connesso è T_1.

(ii) Mostrare che uno spazio metrizzabile numerabile con almeno due punti è totalmente sconnesso.

(iii) *Concludere che le componenti connesse di uno spazio topologico X non sono necessariamente aperte.*

Esercizio 7. *Uno spazio topologico X si dice localmente connesso se ogni punto $p \in X$ contiene un intorno connesso di X.*

(i) *Trovare un esempio di uno spazio connesso che non è localmente connesso e di uno spazio localmente connesso che non è connesso.*

(ii) *Mostrare che le componente connesse di uno spazio localmente connesso sono aperte.*

Esercizio 8. *Sia $T := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$.*

(i) *Mostrare che T è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{N}$.*

(ii) *Descrivere la decomposizione di T in componenti connesse e connesse per archi.*

(iii) *Concludere che T è localmente connesso eccetto in $\{0\}$.*

(iv) *Mostrare che T è totalmente sconnesso.*

(v) *Concludere che uno spazio totalmente connesso non è necessariamente discreto.*

Esercizio 9. *Mostrare che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.*

Esercizio 10. *Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ definito come $X = A_1 \cup A_2$, dove $A_1 = \{0\} \times [0,1]$ e $A_2 = \{(x,y) : 0 < x \leq 1, y = \cos(\frac{\pi}{x})\}$. Mostrare che X è connesso ma non è connesso per archi.*