Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Quarto foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **30/05/2017**

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che le seguenti sono equivalenti:*

(i) *ogni applicazione continua $f : S^1 \to X$ è omotopa a una applicazione costante;*

(ii) *ogni applicazione continua $f : S^1 \to X$ si estende ad un'applicazione continua $g : D^2 \to X$.*

(iii) $\pi_1(X, x_0) = 0$ *per ogni* $x_0 \in X$.

(Si riccorde che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$).

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Si dimostri che $\pi_1(X)$ è un gruppo abeliano se e solo se il morfismo di cambiamento di punto di base β_h dipende solo dai punti iniziale e finale di h.*

Esercizio 3. *Sia $A \subset X$ un retratto di uno spazio topologico X e $i : A \to X$ l'inclusione. Si dimostri che:*

(i) *La mappa indotta da i sui gruppi fondamentali è inniettiva.*

(ii) *Se inoltre A è un retratto per deformazione di X allora i_* è un isomorfismo.*

(iii) *Concludere che S^1 non è un retratto di $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 4. *(i)* *Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$;*

(ii) *Si calcoli $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$.*

(iii) *Si concluda che $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ non possono essere omeomorfi per $n > 2$.*

Esercizio 5. *Siano X_1 e X_2 spazi topologici.*

(i) *Si dimostri che se X_1 e X_2 sono semplicemente connessi, allora il loro prodotto $X_1 \times X_2$ è semplicemente connesso.*

(ii) *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X_2$ rivestimenti. Allora il prodotto $(p_1, p_2) : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento.*

(iii) *Si determini il rivestimento universale del toro $T^2 = S^1 \times S^1$.*

Esercizio 6. *Se determini il gruppo fondamentale dello spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Sug.: usare la apresentazione di $\mathbb{RP}^n = S^n/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica punti antipodali: $x \sim -x$.)*

Esercizio 7. *Sia* $p : \tilde{X} \to X$ *un rivestimento con* X *connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Si dimostri che:*

(i) *Le componenti connesse per archi di* $\tilde{X}$ *sono in corrispondenza biunivoca con le orbite della azione di* $\pi_1(X)$ *nella fibra* $p^{-1}(x_0)$.

(ii) *Sotto la corrispondenza di Galois tra rivestimenti connessi di* X *e sottogruppi di* $\pi_1(X, x_0)$, *il sottogruppo corrispondente alla componente di* $\tilde{X}$ *contenendo un certo sollevamento* $\tilde{x}_0$ *di* x_0 *è lo stabilizzatore di* $\tilde{x}_0$.