Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Secondo esonero: 30/05/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*4 punti*) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, indicare (senza giustificazione) le componenti connesse e le componenti connesse per archi.*

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$.

R:

(ii) $A_2 = A_1 \cup \{(0, 1)\}$.

R:

(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$.

R:

(iv) $A_4 = \overline{A_3}$.

R:

Esercizio 2. *(*10 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Uno spazio topologico connesso per archi è localmente connesso.

R:

(ii) Le componenti connesse di uno spazio topologico sono aperte.

R:

(iii) Un sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.

R:

(iv) Per ogni $n \geq 1$, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica punti sulla stessa retta per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$, è un retratto di $\mathbb{R}^{n+1}$.

R:

(v) Esiste un rivestimento connesso di grado 2 di S^n, dove $n \geq 2$.

R:

Esercizio 3. *(4 punti) Sia X uno spazio topologico metrico completo e sia $\{D_n := \overline{D}_{r_n}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucessione di dischi chiusi tali che $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ e tale che $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Mostrare che $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$.*

Esercizio 4. *(6 punti)*

(i) Sia X uno spazio contraibile e Y uno spazio topologico qualsiasi. Si dimostri che allora la proiezione $\pi : X \times Y \to Y$ è una equivalenza omotopica.

(ii) Si calcoli il gruppo fondamentale del cilindro $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 5. *(10 punti) Sia $A \subset X$ un retratto di uno spazio topologico X e $i : A \to X$ l'inclusione. Si dimostri che:*

(i) La mappa indotta da i sui gruppi fondamentali è iniettiva.

(ii) Se inoltre A è un retratto per deformazione di X allora i_* è un isomorfismo.

(iii) Concludere che S^1 non è un retratto di D^2.

(iv) Mostrare il Teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione 2, cioè, che ogni mappa continua $h : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso.

Esercizio 6. *(6 punti) Sia X uno spazio topologico e $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale. Si dimostri che:*

1. *Qualsiasi altro rivestimento universale di X, $p' : \tilde{X}' \to X$, è equivalente p.*
2. *Dato $x_0 \in X$, si consideri l'azione di monodromia*

$$\rho : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$$

tale che $\rho(\tilde{x}_0, [\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$, dove $\tilde{\alpha}$ è il sollevamento di α ad un arco in $\tilde{X}$ che comincia in $\tilde{x}_0$. Si dimostri che ρ è transitiva.