Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2016/2017

GE220 - Geometria 3 - Secondo esonero: 30/05/2017

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h15m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(4 punti) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, indicare (senza giustificazione) le componenti connesse e le componenti connesse per archi.*

(i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$.

R: A_1 è connesso per archi, e conseguentemente anche connesso.
Quindi abbiamo $C_a(x, y) = C(x, y) = A_1, \forall (x, y) \in A_1$.

(ii) $A_2 = A_1 \cup \{(0, 1)\}$.

R: A_2 è connesso, quindi $C(x, y) = A_2, \forall (x, y) \in A_2$.
Ci sono invece due componenti connesse per archi:
$C_a(0, 1) = \{(0, 1)\}$ e $C_a(x, y) = A_1$ altrimenti.

(iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$.

R: A_3 è connesso per archi, e conseguentemente anche connesso.
Quindi abbiamo $C_a(x, y) = C(x, y) = A_3, \forall (x, y) \in A_3$.

(iv) $A_4 = \overline{A_3}$.

R: A_4 è connesso per archi, e conseguentemente anche connesso.
Quindi abbiamo $C_a(x, y) = C(x, y) = A_4, \forall (x, y) \in A_4$.

Esercizio 2. *(10 punti) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Uno spazio topologico connesso per archi è localmente connesso.

R: Falso. Ad esempio lo spazio topologico A_4 dell'esercizio precedente è connesso per archi ma non è localmente connesso in $p = (0, 1)$.

(ii) Le componenti connesse di uno spazio topologico sono aperte.

R: Falso. Si prenda ad esempio lo spazio topologico
$A_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$.
Allora $C(0, 0) = \{(0, 0)\}$, che non è aperto perché è aderente al suo complementare.

(iii) Un sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.

R: Vero. Sia $V \subset X$ un sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto X e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di V. Allora $\mathcal{U} \cup (X \setminus V)$ è un ricoprimento aperto di X, e quindi ammette un raffinamento localmente finito. Basta osservare adesso che l'intersezione di questo raffinamento con $\mathcal{U}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ che chiaramente è ancora localmente finito.

(iv) *Per ogni $n \geq 1$, lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica punti sulla stessa retta di $\mathbb{R}^{n+1}$ passante per l'origine, è un retratto di $\mathbb{R}^{n+1}$.*

R: Falso. Se $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ fosse un retratto di $\mathbb{R}^{n+1}$, per l'esercizio 5(i), la mappa indotta sui gruppi fondamentali sarebbe iniettiva. Ma siccome $\mathbb{R}^{n+1}$ è semplicemente connesso e $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$, questo non è possibile.

(v) *Esiste un rivestimento connesso di grado 2 di S^n, dove $n \geq 2$.*

R: Falso. Siccome $n \geq 2$, S^n è semplicemente connesso, quindi non ammette rivestimenti connessi non banali.

Esercizio 3. *(4 punti) Sia X uno spazio topologico metrico completo e sia $\{D_n := \overline{D}_{r_n}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucessione di dischi chiusi tali che $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ e tale che $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Mostrare che $\cap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$.*

R: Si veda Teorema 10.14 sul Sernesi 2.

Esercizio 4. *(6 punti)*

(i) *Sia X uno spazio contraibile e Y uno spazio topologico qualsiasi. Si dimostri che allora la proiezione $\pi : X \times Y \to Y$ è una equivalenza omotopica.*

(ii) *Si calcoli il gruppo fondamentale del cilindro $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.*

R: (i) Sia $H_t : X \to X, t \in I$, una omotopia da id_X a una applicazione costante c_{x_0}, dove $x_0 \in X$ è un certo punto di X. Sia $i : Y \to X \times Y$ tale che $i(y) = (x_0, y)$. Dobbiamo fare vedere che:

1. $i \circ \pi$ è omotopo a $id_{X\times Y}$;
2. $\pi \circ i$ è omotopo a id_Y.

Il secondo punto è immediato visto che $\pi \circ i = id_Y$.
Invece $F_t : X \times Y \to X \times Y, t \in I$, dove $F_t(x, y) = (H_t(x), y)$ otteniamo una omotopia tra $F_0 = (H_0, id_Y) = (id_X, id_Y) = id_{X\times Y}$ e $F_1 = (H_1, id_Y) = (c_{x_0}, id_Y) = i \circ \pi$, e segue il primo punto.

(ii) Siccome $C = S^1 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è contraibile, da (i) sappiamo che C e S^1 sono omotopicamente equivalenti, quindi hanno gruppi fondamentali isomorfi. In conclusione, $\pi_1(C) \cong \mathbb{Z}$.

Esercizio 5. *(10 punti) Sia $A \subset X$ un retratto di uno spazio topologico X e $i : A \to X$ l'inclusione. Si dimostri che:*

(i) *La mappa indotta da i sui gruppi fondamentali è iniettiva.*

R: Sia $a \in A$ e consideriamo $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$, dove $i_*([f]) = [i\circ f]$. Dato $[f] \in \pi_1(A, a)$, se $[i \circ f] = [c_a]$ come cappi in $\pi_1(X, a)$, allora esiste una omotopia $H_t, t \in I$, di archi in X da $i \circ f = f$ a c_a. Adesso ponendo $F_t = r \circ H_t, t \in I$, si ottiene una omotopia di archi in A da $[f]$ a $[c_a]$. In conclusione, i_* è iniettiva perché solo l'elemento neutro di $\pi_1(A, a)$ può essere mandato nel elemento neutro di $\pi_1(X, a)$.

(ii) *Se inoltre A è un retratto per deformazione di X allora i_* è un isomorfismo.*

R: Sia $G_t, t \in I$, un retratto per deformazione da id_X a $r : X \to A$, cioè una omotopia (relativa ad A) da id_X a r. Sia $[f] \in \pi_1(X, a)$. Allora $G_t \circ f$ dà una omotopia tra f e $r \circ f$, che è un cappio contenuto in A. La conclusione segue osservando che $i_*([r\circ f]) = [i\circ r\circ f] = [r\circ f] = [f]$ e quindi segue la suriettività di i_*.

(iii) Concludere che S^1 non è un retratto di D^2.

R: Essendo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(D^2) = 0$, non potrebbe esistere una mappa iniettiva dal primo al secondo, contradicendo quanto dimostrato nel punto (i).

(iv) Si dimostri il Teorema del punto fisso di Brouwer in dimensione 2, cioè, che ogni mappa continua $h : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso.

R: Si veda Corollario 16.8 sul Sernesi 2 oppure il Teorema 1.9 a pagina 31 sul Hatcher.

Esercizio 6. *(6 punti) Sia X uno spazio topologico e $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale. Si dimostri che:*

(i) Qualsiasi altro rivestimento universale di X, $p' : \tilde{X}' \to X$, è equivalente a p.

R: Fissiamo un certo punto $x_0 \in X$ e siano $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x}_0' \in p'^{-1}(x_0)$. Allora della corrispondenza di Galois tra classi di equivalenza di rivestimenti di X preservando i punti base e i sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ otteniamo che p e p' sono isomorfi (come rivestimenti) tramite un'omeomorfimo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ che manda $\tilde{x}_0$ in $\tilde{x}_0'$ se e solo se $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p'_*(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}_0'))$. Essendo entrambi $\tilde{X}$ e $\tilde{X}'$ semplicemente connessi, questi due sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$ sono necessariamente banali, e quindi p e p' sono rivestimenti equivalenti.

(ii) Dato $x_0 \in X$, si consideri l'azione di monodromia

$$\rho : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$$

tale che $\rho(\tilde{x}_0, [\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$, dove $\tilde{\alpha}$ è il sollevamento di α ad un arco in $\tilde{X}$ che comincia in $\tilde{x}_0$. Si dimostri che ρ è transitiva.

R: Dati $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_0' \in p^{-1}(x_0)$ dobbiamo far vedere che $\exists [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $\rho(\tilde{x}_0, [\alpha]) = \tilde{x}_0'$. Sia $f : I \to \tilde{X}$ un'arco tra x_0 e $\tilde{x}_0'$ (essendo $\tilde{X}$ un rivestimento universale, è semplicemente connesso, e in particolare connesso per archi). Allora $[p \circ f] \in \pi_1(X, x_0)$ è tale che il suo sollevamento $\widetilde{p \circ f}$ a $\tilde{X}$ che comincia in $\tilde{x}_0$ è necessariamente uguale ad f. Quindi prendendo $\alpha = p \circ f$ otteniamo che $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0'$, quindi l'azione è transitiva.