Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Ingegneria civile – a.a. 2015/2016
Complementi di Matematica: Canale L-Z
Prima prova di valutazione in itinere – 30 Aprile 2016.

Cognome e nome ______________________ **Matricola**_________

Specificare quale esame si deve sostenere: **Geometria** □ **Calcolo II** □

Esercizio 0. Per ciascuno dei seguenti quesiti, il candidato è tenuto esclusivamente a indicare le risposte esatte, senza dare alcuna motivazione. Ogni risposta esatta dà un punteggio positivo, ogni risposta errata un punteggio negativo, le risposte non date valgono 0.

(i) Determinare i versori di $\mathbb{R}^2$ (con prodotto scalare standard) che formano un angolo convesso uguale a $\frac{\pi}{2}$ con il vettore $(4, 3)$.

Soluzione: $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

(ii) Sia $P = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ e sia $Q = \sigma_C(P)$ dove $C = (-\frac{1}{2}, 2)$. Calcolare la matrice del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\{\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\}$.

Soluzione:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(iii) Determinare il valore del parametro m tale che il prodotto vettoriale $\begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sia perpendicolare alla retta di equazioni $X - Y = X - Z + 10 = 0$.

Soluzione: $m = 2$

(iv) Si consideri la conica C di $\mathbb{R}^2$ equazione $6X^2 + 6Y^2 + 4XY + 12X + 4Y = 0$. Dare le risposte esatte:
a) C è un'ellisse degenere SI NO
b) C è una parabola non degenere SI NO
c) C possiede punti reali SI NO
d) C possiede centro di simmetria NO SI e il suo centro ha coordinate ....
Soluzione: a) NO, b) NO, c) SI, d) SI $(-1, 0)$

Esercizio 1. Dopo aver determinato il valore del parametro h per cui le rette

$$r : X + Y + Z + 1 = X - Y + 3 = 0, \quad \text{e} \quad s : \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} h \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

sono parallele, determinare:

(a) un'equazione del fascio di piani propri di asse s;

(b) un'equazione del piano che contiene s e passa per il punto di coordinate $(1, 1, 0)$.

Soluzione:
$h = -2$, fascio $\phi_{\lambda,\mu} = \{\lambda(X - Y - 1) + \mu(-2Y - Z + 1) = 0\}$;
piano: $X + Y + Z - 2 = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Mostrare che A definisce un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(2) Trovare una base $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle$ relativamente alla base $\mathbf{b}$ sia diagonale.

Soluzione: (1) La matrice è simmetrica e i minori principali sono positivi.
(2) Applicando GS alla base canonica si ottiene la base ortogonale $\mathbf{b}$:
$$(1, 0, 0),\ (2, 1, 0),\ (-1, -1/2, 1)$$

Esercizio 3. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(X, Y, Z) = 2XY + 2XZ + 2YZ$$

a) classificare q e determinarne la segnatura. b) trovare una base ortonormale rispetto alla quale q sia diagonalizzata. c) calcolarne l'espressione in tale base. d) Determinare una base di Sylvester e la forma canonica di Sylvester.

Soluzione: La matrice della forma bilineare è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$, e quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Pertanto q è non degenere, indefinita con segnatura $(1, 2)$.

L'autospazio V_2 è generato dal vettore $v_1 = (1, 1, 1)$, che normalizzato diventa $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

L'autospazio V_{-1} ha equazione $X + Y + Z = 0$. Una sua base è ad esempio data da $\{v_2 = (1, -1, 0),\ v_3 = (0, 1, -1)\}$. Applicando Gram-Schmidt si ottiene la coppia di vettori ortogonali tra loro:

$$w_2 = v_2,\ w_3 = (1/2, 1/2, -1)$$

i quali, normalizzati, danno la base ortonormale

$$\left\{u_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), u_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})\right\}$$

di V_1.

Quindi una base ortonormale che diagonalizza q è $\{u_1, u_2, u_3\}$ e in tale base l'espressione di q è:

$$q(X_1, X_2, X_3) = 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$$

La corrispondente base di Sylvester è

$$\left\{\frac{u_1}{\sqrt{2}}, u_2, u_3\right\}$$

e la forma canonica di Sylvester è $X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$.