Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Primo Appello: 14/06/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h30m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(14 punti) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Uno spazio metrico è N_1.*

R:

(ii) *Una identificazione è una mappa aperta.*

R:

(iii) $\mathbb{R}^2$ *è omeomorfo a* $\mathbb{R} \times [0, +\infty]$.

R:

(iv) *Uno spazio metrico totalmente sconnesso è discreto.*

R:

(v) *Le componenti connesse di uno spazio topologico sono aperte.*

R:

(vi) *Il gruppo fondamentale di due sfere tangenti è banale.*

R:

(vii) *Esiste una infinità di rivestimenti non isomorfi di* $\mathbb{RP}^1$ *(la retta proiettiva reale).*

R:

Esercizio 2. *(8 punti) Consideriamo nell'intervallo $X = [-1,1]$ la topologia generata dagli aperti della forma $[-1,b)$, con $b > 0$ e $(a,1]$, con $a < 0$, ossia, la topologia meno fine contenendo questi sottoinsiemi come aperti. Si dimostri che:*

(i) Gli intervalli del tipo (a,b), con $a < 0$ e $b > 0$ sono aperti di X, ma la topologia su X è meno fine della topologia indotta della topologia Euclidea.

(ii) X è T_0, ma non è né T_1 né T_3;

(iii) X è compatto;

(iv) X è irriducibile;

(v) X è N_2;

(vi) Esistono successioni in X che hanno una infinità di limiti.

Esercizio 3. *(7 punti) Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice relativamente compatto se è contenuto in un sottospazio compatto di X. Si dimostri che:*

(i) L'imagine continua di spazi relativamente compatti è relativamente compatta.

(ii) Se X è di Hausdorff, un sottoinsieme $A \subset X$ è relativamente compatto se e soltanto se $\overline{A}$ è compatto.

(iii) Se X è uno spazio metrico, un sottospazio $A \subset X$ è totalmente limitato se e soltanto se $\overline{A}$ è totalmente limitato.

(iv) Un sottospazio di uno spazio metrico completo è relativamente compatto se e soltanto se è totalmente limitato.

Esercizio 4. *(3 punti) Siano $f, g : S^n \to S^n$ due mappe continue tali che $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in S^n$. Mostrare che f e g sono omotope.*

Esercizio 5. *(5 punti) Sia X uno spazio topologico connesso per archi e, dato un'arco $\gamma : I \to X$ da a a b, sia $\gamma^\sharp : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ tale che $\gamma^\sharp([\alpha]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$, dove $i(\gamma) : I \to X$ è il cammino tale che $i(\gamma)(t) = \gamma(1-t)$. Si dimostri che:*

(i) $\gamma^\sharp$ è un isomorfismo di gruppi;

(ii) $\pi_1(X,a)$ è un gruppo abeliano se e solo se $\gamma^\sharp$ non dipende dalla scelta del cammino γ.

Esercizio 6. *(4 punti) Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Mostrare che:*

(i) X è Hausdorff se e solo se E è Hausdorff.

(ii) Ogni applicazione continua $f : S^2 \to X$ ammette un sollevamento a E.