Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Primo Appello: 14/06/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h30m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*14 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Uno spazio metrico è N_1.

R: Vero. Infatti, dato $x \in X$, un sistema fondamentale di intorni numerabile di x è dato da $\mathcal{I}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x), n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Una identificazione è una mappa aperta.

R: Falso. Una identificazione può non essere aperta. Ad esempio, dato $I = [0,1]$ e $A = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, la mappa quoziente $q : I \to I/A$ è tale che $q((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$ è il punto $[A] \in I/A$, che non è aperto (perchè A non lo è in X).

(iii) $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty]$.

R: Falso. Basta osservare che dato un qualsiasi punto P di $\mathbb{R}^2$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}) \cong \mathbb{Z}$, mentre in $\mathbb{R} \times [0, +\infty]$, il complementare dell'origine ad esempio è semplicemente connesso (basta utilizzare il teorema di Van Kanpem debole per dimostrarlo).

(iv) Uno spazio metrico totalmente sconnesso è discreto.

R: Falso. Ad esempio $\mathbb{Q}$ come sottospazio di $\mathbb{R}$ è totalmente sconnesso, ma non è discreto perchè i suoi punti non sono aperti.

(v) Le componenti connesse di uno spazio topologico sono aperte.

R: Falso. Basta considerare di nuovo l'esempio di $\mathbb{Q}$ con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$: le componenti connesse sono i singoli punti di $\mathbb{Q}$, che non sono aperti.

(vi) Il gruppo fondamentale di due sfere tangenti è banale.

R: Vero. Sia $P = S_1 \cap S_2$ il punto di intersezione delle due sfere: S_1 e S_2. Applicando il teorema di Van Kampen debole a $X := S_1 \cup S_2$, essendo le sfere e il punto di intersezione semplicemente connessi, concludiamo che anche X lo è.

(vii) Esiste una infinità di rivestimenti connessi non isomorfi di $\mathbb{RP}^1$ (la retta proiettiva reale).

R: Falso. Abbiamo visto che $\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}_2$ è un gruppo con due elementi. Quindi, per la corrispondenza di Galois, esistono appena due rivestimenti connessi non isomorfi di $\mathbb{RP}^1$.

Esercizio 2. *(*8 punti*) Consideriamo nell'intervallo $X = [-1, 1]$ la topologia generata dagli aperti della forma $[-1, b)$, con $b > 0$ e $(a, 1]$, con $a < 0$, ossia, la topologia meno fine contenendo questi sottoinsiemi come aperti. Si dimostri che:*

(i) Gli intervalli del tipo (a, b), con $a < 0$ e $b > 0$ sono aperti di X, ma la topologia su X è meno fine della topologia indotta della topologia Euclidea.

(ii) *X è T_0, ma non è né T_1 né T_3;*

(iii) *X è compatto;*

(iv) *X è irriducibile;*

(v) *X è N_2;*

(vi) *Esistono successioni in X che hanno una infinità di limiti.*

R:

(i) Sia $\mathcal{T}$ a topologia su X generata degli aperti $[-1, b)$, con $b > 0$ e $(a, 1]$, con $a < 0$ e $\mathcal{T}_E$ la topologia indotta su X come sottospazio di $\mathbb{R}$, con la topologia di sottospazio, Allora in $\mathcal{T}$, oltre gli aperti della forma $[-1, b)$, con $b > 0$ e $(a, 1]$, con $a < 0$, sono aperti anche intersezioni di questi, e quindi aperti proprio della forma (a, b), con $a < 0$ e $b > 0$. Chiaramente quindi $\mathcal{T}_E \leq \mathcal{T}$. Invece insiemi del tipo $[-1, b)$, con $b \leq 0$, sono aperti in $\mathcal{T}_E$, ma non in $\mathcal{T}$, quindi $\mathcal{T}_E \leq \mathcal{T}$.

(ii) Dati due punti $c, d \in X$, con $c \leq d$, se $d > 0$ allora l'aperto $[-1, d)$ contiene c e non d, altrimenti se $d \leq 0$, l'aperto $(c, 1]$ contiene d ma non c, quindi X è T_0. Per far vedere che non è T_1 basta osservare che $\{0\}$ non è chiuso. Invece per far vedere che non è T_3, osserviamo che $\{-1\}$ è un chiuso di X e che qualunque aperto che lo contenga contiene per forza 0.

(iii) Sia $\mathcal{U}$ in ricoprimento di X. Allora un sottoricoprimento finito è $U_{-1} \cup U_1$, dove U_{-1} è un aperto in $\mathcal{U}$ che contiene -1 e U_1 è un aperto in $\mathcal{U}$ che contiene 1.

(iv) Per far vedere che X è irriducibile, basta osservare che ogni due aperti non vuoti di X contengono lo 0, e quindi hanno intersezione non vuota.

(v) Una base numerabile per la topologia di X è $\{[-1, \frac{1}{n}), (\frac{1}{m}, 1], n, m \in \mathbb{N}\}$, quindi X è N_2.

(vi) Prendiamo $a_n = 0$, la sucessione costante uguale a 0. Allora siccome ogni aperto non banale di X contiene 0, si conclude che a_n converge a x, per qualunque punto x di X.

Esercizio 3. *(*7 punti*) Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice relativamente compatto se è contenuto in un sottospazio compatto di X. Si dimostri che:*

(i) *L'imagine continua di spazi relativamente compatti è relativamente compatta.*

(ii) *Se X è di Hausdorff, un sottoinsieme $A \subset X$ è relativamente compatto se e soltanto se $\overline{A}$ è compatto.*

(iii) *Se X è uno spazio metrico, un sottospazio $A \subset X$ è totalmente limitato se e soltanto se $\overline{A}$ è totalmente limitato.*

(iv) *Un sottospazio di uno spazio metrico completo è relativamente compatto se e soltanto se è totalmente limitato.*

R:

(i) Sia $f : X \to Y$ continua e $A \subset X$ relativamente compatto. Allora esiste K compatto tale che $A \subset K$. Ma allora $f(A) \subset f(K)$ e, essendo f continua, $f(K)$ è compatto.

(ii) Chiaramente, se A è tale che $\overline{A}$ è compatto, allora A è relativamente compatto. Supponiamo adesso X di Hausdorff e $A \subset K$, con K un compatto di X. Allora siccome X è di Hausdorff, K è chiuso, quindi $\overline{A} \subset K$. Essendo $\overline{A}$ un chiuso contenuto in un compatto, anche $\overline{A}$ è compatto.

(iii) Supponiamo che $\overline{A}$ è totalmente limitato. Allora, dato $r > 0$, esiste $N > 0$ e punti $x_1, \dots, x_N$ di $\overline{A}$ tali che $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{r}{2}} x_i$. Siano $y_1 \dots, y_N \in B_{\frac{r}{2}}(x_i) \cap A$. Allora per la disuguaglianza triangolare, dato $a \in A \cap B_{\frac{r}{2}}(x_i)$, $d(a, y_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, quindi $A \subset \cup_{i=1}^N B_r(y_i)$, e otteniamo che A è totalmente limitato. Supponiamo adesso che A è totalmente limitato e sia $r > 0$ un reale positivo. Allora esiste $N > 0$ e punti $x_1, \dots, x_N$ tali che $A \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{r}{2}}(x_i)$. Ma allora $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^N \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_i)} \subset \cup_i^N B_r(x_i)$.

(iv) Si veda [Manetti, Corollario 6.36].

Esercizio 4. *(*3 punti*) Siano $f, g : S^n \to S^n$ due mappe continue tali che $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in S^n$. Mostrare che f e g sono omotope.*

R: Il fatto che $f(x) \neq -g(x), \forall x \in X$, implica che il segmento di retta di $\mathbb{R}^2$ che unisce $f(x)$ a $g(x)$ non passa per l'origine. Quindi se $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ è tale che

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t(g(x))}{||(1-t)f(x) + tg(x)||},$$

si osserva che F è ben definita e dà un'omotopia in S^n tra f e g.

Esercizio 5. *(*5 punti*) Sia X uno spazio topologico connesso per archi e, dato un'arco $\gamma : I \to X$ da a a b, sia $\gamma^\sharp : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ tale che $\gamma^\sharp([\alpha]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$, dove $i(\gamma) : I \to X$ è il cammino tale che $i(\gamma)(t) = \gamma(1-t)$. Si dimostri che:*

(i) $\gamma^\sharp$ è un isomorfismo di gruppi;

(ii) $\pi_1(X,a)$ è un gruppo abeliano se e solo se $\gamma^\sharp$ non dipende dalla scelta del cammino γ.

R: Per (i) si veda [Manetti, Lemma 11.13].

Per (ii), siano $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,a)$ e, dato un punto b nell'imagine di β, decomponiamo β come composizione di cammini da a a b, $\beta = \gamma * i(\gamma')$, dove $\gamma, \gamma' \in \Omega(X,a,b)$. Per concludere basta osservare che $[i(\gamma * \alpha * \gamma)] = [i(\gamma') * \alpha * \gamma'] \Leftrightarrow [\alpha * \gamma * i(\gamma')] = [\gamma * i(\gamma') * \alpha] \Leftrightarrow [\alpha * \beta] = [\beta * \alpha]$.

Esercizio 6. *(*4 punti*) Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Mostrare che:*

(i) X è Hausdorff se e solo se E è Hausdorff.

(ii) Ogni applicazione continua $f : S^2 \to X$ ammette un sollevamento a E.

R:

(i) Supponiamo che E sia Hausdorff e consideriamo x e y due punti distinti di X. Siano U_x e U_y due aperti banalizzanti per p contenenti x e y, rispettivamente. Se U_x e U_y non si intersecano, possiamo prenderli come aperti che separano x da y, altrimenti consideriamo $z \in U_x \cap U_y$. Siano $\tilde{U}_x$ e $\tilde{U}_y$ aperti di E omeomorfi a U_x e U_y, rispettivamente, e entrambi contenenti $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$. Siano $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ sollevamenti di x e y contenuti in $\tilde{U}_x$ e $\tilde{U}_y$, rispettivamente. Allora, siccome E è Hausdorff, esistono aperti V_1 e V_2 contenenti x e y, rispettivamente, e tali che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Per costruzione è chiaro che $p(V_1 \cap \tilde{U}_x)$ e $p(V_2 \cap \tilde{U}_y)$ sono aperti di X (p è un'omeomorfimo quando ristretto a $\tilde{U}_x$ e $\tilde{U}_y$) contenenti x e y, rispettivamente, e con intersezione vuota. Concludiamo che X è di Hausdorff.

Supponiamo adesso che X sia di Hausdorff e prendiamo due punti distinti $x, y \in E$. Se $p(x) = p(y)$, siccome p è un rivestimento, esistono aperti disgiunti contenenti x e y (gli aperti omeomorfi ad un'aperto banalizzante di X contenendo la loro imagine). Se invece $p(x) \neq p(y)$, prendiamo U e V aperti disgiunti di X che contengono $p(x)$ e $p(y)$, rispettivamente. Allora $p^{-1}(U)$ e $p^{-1}(V)$ sono aperti disgiunti di E che contengono x e y, rispettivamente. Concludiamo che E è di Hausdorff.

(ii) Basta osservare che, essendo S_2 semplicemente connesso, $\pi_1(S_2) = 1$, quindi

$$f_*(\pi_1(S_2)) = 1 \subset p_*(\pi_1(E)),$$

quindi per il criterio del sollevamento, esiste un sollevamento di f a E.