Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Secondo Appello: 16/07/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Durata: 3h30m

Esercizio 1. *(*14 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *La topologia cofinita su $\mathbb{R}$ è meno fine della topologia Euclidea su $\mathbb{R}$.*

R:

(ii) *La proiezione $\pi_X : X \times Y \to X$ su uno dei fattori di un prodotto di spazi topologici è una mappa chiusa.*

R:

(iii) *Uno spazio metrico è N_2.*

R:

(iv) *Sia $\mathbb{R}_l$ l'insieme dei numeri reali muniti della topologia di Songenfrey e sia $X \subset \mathbb{R}_l$ un sottoinsieme non limitato. Allora X non è compatto.*

R:

(v) *Un quoziente di uno spazio connesso è connesso.*

R:

(vi) *Il cilindro $C^2 = S^1 \times [0,1]$ ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$.*

R:

(vii) *Esiste un rivestimento connesso da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.*

R:

Esercizio 2. *(*5 punti*) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$. Si dimostri che:*

(i) *X è di Hausdorff se e solo se ogni punto di X è intersezione di tutti i suoi intorni chiusi;*

(ii) *se Y è connesso, anche $\overline{Y}$ è connesso.*

Esercizio 3. *(*7 punti*) Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione dei segmenti di retta che uniscono l'origine ai punti di coordinate $\{(1, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ con il segmento $\{(x, 0) : \frac{1}{2} < x \leq 1\}$.*

(i) *Si determini la chiusura $\overline{X}$ di X in $\mathbb{R}^2$.*

(ii) *Si dimostri che X è connesso e che $\overline{X}$ è connesso e connesso per archi.*

(iii) *Si dimostri che X non è localmente connesso né connesso per archi.*

Esercizio 4. *(*7 punti*)*

(i) *Sia Y uno spazio contraibile. Si dimostri che, per ogni spazio topologico X, la proiezione $p : X \times Y \to X$ è una equivalenza omotopica.*

(ii) *Sia $f : X \to Y$ una applicazione continua. Il* cilindro mappante *di f è lo spazio topologico M_f ottenuto a partire della unione disgiunta $(X \times I) \coprod Y$ identificando un punto $(x, 1) \in X \times I$ con $f(x) \in Y$. Si dimostri che esiste un retratto per deformazione da M_f a Y.*

(iii) *Illustrare il resultato precedente nel caso in cui f consiste nell'inclusione $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ e concludere che "*un cilindro con un solo coperchio è semplicemente connesso*".*

Esercizio 5. *(7 punti)*

(i) *Alla luce della corrispondenza di Galois, descrivere tutti i rivestimenti connessi di S^1 a meno di isomorfismo;*

(ii) *Sia $f : S^2 \to S^1$ una applicazione continua. Descrivere tutti i rivestimenti di S^1 per i quali esiste un sollevamento di f.*

(iii) *Dimostrare che ogni applicazione continua $f : S^2 \to S^1$ è omotopa ad una applicazione costante.*