Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Terzo Appello: 14/09/2019

Docente: Margarida Melo

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Durata: 3h30m

Esercizio 1. *(*14 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Sia $A \subset X$ un aperto. Allora $A = \mathrm{int}(\overline{\mathrm{A}})$.*

R:

(ii) *Uno spazio topologico N_2 è separabile.*

R:

(iii) *Un quoziente di uno spazio T_1 è T_1.*

R:

(iv) *Un sottospazio ilimitato di uno spazio metrico non è compatto.*

R:

(v) *Un spazio metrico è connesso.*

R:

(vi) *Il prodotto di due spazzi semplicemente connessi è semplicemente connesso.*

R:

(vii) *Esistono due rivestimenti connessi non isomorfi di S^2.*

R:

Esercizio 2. *(*10 punti*) Sia X un'insieme e $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ una partizione di X in insiemi disgiunti e contenente l'insieme vuoto, i.e., $X = \cup_{U \in \mathcal{P}} U$, $\emptyset \in \mathcal{P}$ e dati $U, V \in \mathcal{P}$, $U \cap V = \emptyset$. Si dimostri che*

(i) $\mathcal{P}$ è una base per una topologia su X e gli aperti di questa topologia sono anche chiusi;

(ii) Per alcune scelte di partizioni $\mathcal{P}$, X non è T_0, né T_1 né T_2, ma è T_3 e T_4;

(iii) Le componenti connesse di X sono gli elementi di $\mathcal{P}$.

(iv) Si consideri il caso in cui $X = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $\mathcal{P} = \{\{2k-1, 2k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}\}$. Allora $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ con la topologia indotta da $\mathcal{P}$ è N_2, separabile e di Lindelöf.

Esercizio 3. *(*3 punti*) Sia $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots$ una catena di chiusi non vuoti in uno spazio compatto. Concludere che $\cap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

Esercizio 4. *(*5 punti*)*

(i) Usando il teorema di van Kampen debole, dimostrare che S^n è semplicemente connessa per $n \geq 2$.

(ii) Sia A un retratto di D^2. Si dimostri che ogni mappa continua $f : A \to A$ ammette un punto fisso.

Esercizio 5. *(*5 punti*)*

(i) Siano X e Y spazi topologici e siano $p_1 : \tilde{X} \to X$ e $p_2 : \tilde{Y} \to Y$ rivestimenti universali. Si dimostri che $(p_1, p_2) : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ è un rivestimento universale.

(ii) Si determini, esplicitando la mappa di rivestimento, il rivestimento universale del toro $T^2 = S^1 \times S^1$.