Diario delle esercitazioni di GE220

Esercitatore: Raffaele Carbone.

1/3/2019 Topologia di chiusi. Operatore di chiusura [Manetti, Esercizio 3.13]. Esempi di topologie su $\mathbb{R}$: discreta, grossolana, cofinita, semicontinuità inferiore. Confronto con la topologia euclidea. Topologia di sottospazio, compatibilità degli operatori di chiusura.

8/3/2019 Proprietà della famiglia di intorni di un punto. Esempi di collezioni di intorni in varie topologie su $\mathbb{R}$. Spazi T1 e caratterizzazione tramite intorni [Manetti, Esercizio 3.10]. Le famiglie di intorni determinano la topologia [Manetti, Esercizio 3.12]. Definizione di continuità. Caratterizzazione tramite l'aderenza. Esempi di funzioni continue rispetto a varie topologie.

15/3/2019 Due spazi topologici omeomorfi sono identificabili in tutto ciò che riguarda la topologia: hanno gli stessi aperti, chiusi, intorni; hanno lo stesso operatore di chiusura. Sottospazi corrispondenti di spazi omeomorfi sono omeomorfi. Spazi metrici. Dimostrazione che in uno spazio metrico (X, d), il disco $D_R(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq R\}$ è chiuso usando la continuità della funzione

$$d(x, \_) : \quad X \to \mathbb{R}.$$

Esempio notevole: la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Equivalenza tra la definizione di continuità secondo la topologia e secondo l'analisi. Esempi di omeomorfismi tra spazi euclidei: il pallone bucato è omeomorfo al piano (proiezione stereografica).

22/3/2019 La circonferenza e il quadrato sono omeomorfi come sottospazi di $\mathbb{R}^2$ [Manetti, pag. 12]. Proprietà universali di alcune costruzioni topologiche: prodotto finito, quoziente, unione disgiunta. Costruzioni notevoli usando sottospazi di $\mathbb{R}^n$: la retta con due origini; il nastro di Moebius; la bottiglia di Klein; lo spazio proiettivo reale.

29/3/2019 Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è omeomorfo al quoziente della sfera S^n rispetto alla relazione antipodale [Manetti, Capitolo 5.4]. Assiomi di numerabilità. Dimosrazione che la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ è N_1, separabile e di Lindelof, ma non N_2 [Munkres, Example 30.3]. Assiomi di separazione. $\mathbb{R}_\ell$ è normale, mentre $\mathbb{R}^2_\ell$ non lo è [Munkres, Examples 30.2, 30.3].

5/4/2019 Compattezza di spazi topologici e di sottospazi. Se due spazi topologici sono omeomorfi, allora uno dei due è compatto se e solo se lo è l'altro. Corollario: $[0, 1]$ e $[0, 1)$ non sono omeomorfi. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è compatto poiché è un quoziente di S^n, e contiene $\mathbb{R}^2$ come aperto denso. Compattificazione di

Alexandroff di uno spazio topologico: costruzione e dimostrazione. La compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$ è omeomorfa alla sfera S^2. Dimostrazione che il dominio di una mappa continua, chiusa, suriettiva, a fibre compatte verso uno spazio compatto, è compatto [Munkres, Exercise 26.12].

18/4/2019 Assioma della scelta e formulazioni equivalenti. Definizione di prodotto infinito di spazi topologici. Il prodotto (infinito) di spazi compatti è compatto; il prodotto (infinito) di spazi T2 è T2 (senza dimostrazione). Esempio di spazio compatto, non compatto per successioni [Manetti, Esercizio 7.13]. Esempio di spazio compatto per successioni, non compatto [Manetti, Esercizio 7.14].

7/5/2019 Spazi metrici completi, limitati, totalmente limitati: implicazioni reciproche e controesempi; non sono proprietà topologiche prese separatamente, ma lo sono se considerate insieme. Una successione di Cauchy converge se e solo se ammette un punto di accumulazione [Manetti, Lemma 6.25]. Un sottospazio di uno spazio metrico completo è completo se e solo se è chiuso [Manetti, Lemma 6.29]. In uno spazio metrico completo, ogni catena discendente di palle chiuse con raggio tendente a 0 ha intersezione non vuota. Uno spazio metrico completo privo di punti isolati è non numerabile. Definizione di paracompattezza: uno spazio topologico tale che ogni ricoprimento ammette un sottoricoprimento localmente finito, è compatto.

10/5/2019 Spazi topologici connessi e loro proprietà. L'unione di una famiglia di sottospazi connessi con un sottospazio connesso che intereca ogni sottospazio della famiglia è connessa [Munkres, Exercise 23.3]. Sottospazi connessi di $\mathbb{R}$ e Teorema del valore intermedio. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ è connesso. $\mathbb{Q}$ non è connesso. Connessione per archi. Esempio di spazio connesso per archi, la cui chiusura è connessa ma non connessa per archi: il seno del topologo [Munkres, Example 24.7].

14/5/2019 Applicazioni della connessione. L'insieme

$$X = \{xy(x^2 - 9)(y^2 - 4)(x - y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

è tale che ogni omeomorfismo di X in se stesso fissa l'origine. Lemma di Borsuk [Manetti, Lemma 4.14] e conseguenza: aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 2$. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ numerabile con $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n - A$ è connesso per archi [Munkres, Exercise 24.9]. Definizione di varietà topologica ed esempi. Le componenti connesse di una varietà topologica sono aperte, localmente compatte e possiedono esaustioni in compatti [Manetti, Proposizione 7.7]. Corollario: ogni varietà topologica è paracompatta e normale. Definizione di partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento aperto fissato. Traccia della dimostrazione che ogni spazio paracompatto di Hausdorff ammette partizioni dell'unità [Munkres, Theorem 41.7].

24/5/2019 Gruppo fondamentale ed equivalenza omotopica: intuizione, esempi, applicazione come invariante topologico. Calcolo del gruppo fondamentale dei seguenti spazi usando il teorema di Van Kampen:

- $X = A - \{p\}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso e $n \geq 2$;
- $X = \mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}$ con $m \geq 1, n > 2$;
- $X = \mathbb{R}^2 - \{P, Q\}$.

31/5/2019 Classificazione dei rivestimenti di S^1. Esempio di rivestimento di $S^1 \vee S^1$ (due circonferenze tangenti)[1]. Lemma di Borsuk [Manetti, Teorema 12.33] e conseguenze [Manetti, Corollario 12.34].

[1] Vedi J. Lee, Introduction to Topological Manifolds, GTM, volume 202, Exercise 11.1, pag. 235. Disponibile all'indirizzo `http://dx.doi.org/10.1007/b98853`