

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2018/2019
GE220 - Topologia - Primo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO
DA CONSEGNARE ENTRO: 20/03/2019

Esercizio 1. Calcolare l'interno, chiusura, frontiera e derivato di $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, dove \mathbb{R} è munito della topologia cofinita.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico. Diciamo che X è irriducibile se e solo se non esistono chiusi propri $C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$. Si dimostri che le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (i) X è irriducibile.
- (ii) Se U e V sono aperti non vuoti di X , allora $U \cap V \neq \emptyset$.
- (iii) Ogni aperto non vuoto U di X è denso in X , i.e. $\bar{U} = X$.

Esercizio 3.

Siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue che coincidono su un sottoinsieme denso S di X . Si dimostri che f e g coincidono su tutto X .

Esercizio 4. Una funzione continua e suriettiva $r : X \rightarrow A$ da uno spazio topologico X in uno suo sottospazio si dice un retratto di A se $r|_A$ è l'applicazione identità da A in A . Si dimostri che

- (i) \mathbb{Q} non è un retratto di \mathbb{R} .
- (ii) Il disco unitario $\bar{D}_1(0, 0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ di \mathbb{R}^2 è un retratto di \mathbb{R}^2 .

Esercizio 5. Sia d la distanza euclidea su \mathbb{R}^2 e $\underline{0}$ l'origine di \mathbb{R}^2 . Consideriamo la funzione

$$d^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

definita da

$$d^*(x, y) = \begin{cases} d(x, \underline{0}) + d(\underline{0}, y) & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

- (i) Si dimostri che d^* è una metrica su \mathbb{R}^2 .
- (ii) Si descrivano tutti i dischi aperti per la metrica d^* .
- (iii) La topologia τ_{d^*} indotta da d^* è strettamente più fine della topologia euclidea τ_d indotta da d .