Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Topologia - Secondo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE ENTRO: **3/4/2019**

Sia X uno spazio topologico. Allora X si dice

- T_0, se presi $x \neq y$ in X, esiste un'aperto U che contiene uno ma non l'altro;
- T_1, se i suoi punti sono chiusi;
- T_2, se è di Hausdorff;
- T_3, se dati un chiuso $F \subset X$ un punto $x \notin F$, esistono aperti U, V tali che $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- T_4, se dati due chiusi disgiunti A e B di X, esistono aperti U e V tali che $A \subset U$, $B \subset V$ and $U \cap V = \emptyset$.

Inoltre, se X soddisfa T_1 e T_3 (risp. T_4), allora X si dice *regolare* (risp. *normale*).

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico.*

(i) Dimostrare che X è T_0 se e solo se presi due punti $x \neq y \in X$, allora $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

(ii) Sia definita in X una relazione $\sim$ nel modo seguente: $x \sim y$ se e solo se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e che lo spazio quoziente $X/\sim$ è uno spazio T_0.

(iii) Mostrare che uno spazio topologico X è T_1 se e solo se ogni sottoinsieme di X è intersezione degli aperti che lo contengono.

(iv) Mostrare che uno spazio è di Hausdorff se e solo se ogni punto è l'intersezione di tutti i suoi intorni chiusi.

(v) Mostrare che uno spazio è T_3 se e solo se ogni suo sottoinsieme chiuso è l'intersezione di tutti i suoi intorni chiusi (dati $A, B \subset X$, B si dice un intorno di A se esiste un aperto U di X tale che $A \subset U \subset B$).

Esercizio 2. *Si consideri sul'lintervallo $I = [0, 1]$ una relazione di equivalenza $\sim$ che identifica i punti su un certo sub-intervallo (a, b), $(a, b]$ o $[a, b]$ di I, con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Si descriva in ogni caso lo spazio quoziente $X/\sim$, facendo riferimento alle proprietà di separazione che soddisfa.*

Esercizio 3. *Uno spazio si dice di Tychonoff o completamente regolare se è uno spazio T_1 e se dati un chiuso $A \subset X$ e un punto $x \notin A$, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ e $f(A) = 1$.*

(i) Si dimostri che uno spazio di Tychonoff è regolare.

(ii) *Senza utilizzare (i), si dimostri che uno spazio metrizzabile è di Tychonoff.*

(iii) *Si dimostri che sottospazi e prodotti finiti di spazi di Tychonoff sono di Tychonoff.*

(iv) *Si dimostri che* $\mathbb{R}_l$*, l'insieme dei numeri reali munito della topologia di Sorgenfrey, è normale e che* $\mathbb{R}_l^2$ *è completamente regolare ma non è normale.*

Esercizio 4. *Uno spazio si dice separabile se ammette un sottoinsieme denso numerabile. Si dimostri che il prodotto di due spazi separabili è separabile ma che un sottospazio di uno spazio separabile non è necessariamente separabile.*

Esercizio 5. *Sia* X *uno spazio metrico. Allora sono equivalenti:*

(i) X *soddisfa il secondo assioma di numerabilità (i.e.* X *è* N_2*);*

(ii) X *è di Lindelöf;*

(iii) X *è separabile.*

(Sug. Ricordare che, per il Teorema di Cantor, una unione numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile.)