

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2018/2019
GE220 - Geometria 3 - Terzo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO
DA CONSEGNARE ENTRO: 22/05/2019

Esercizio 1. Siano \mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali munito della topologia di sottospazio di \mathbb{R} e \mathbb{R}_l la retta di Sorgenfrey.

- (i) Mostrare che \mathbb{Q} e \mathbb{R}_l non sono localmente compatti.
- (ii) Determinare la decomposizione di \mathbb{Q} e \mathbb{R}_l in componenti connesse.

Esercizio 2. Mostrare che esistono sottospazi non chiusi di \mathbb{R} e ancora paracompatti (in particolare, un sottospazio paracompatto di uno spazio di Hausdorff non è necessariamente chiuso).

Esercizio 3. (i) Mostrare che $\mathbb{R}^n \setminus L$, dove L è un sottospazio lineare di codimensione almeno 2 è connesso, mentre $\mathbb{R}^n \setminus H$ è sconnesso, dove H è un iperpiano di \mathbb{R}^n .

- (ii) Concludere che \mathbb{R} e \mathbb{R}^n non sono omeomorfi se $n > 1$.

Esercizio 4. Uno spazio topologico X si dice totalmente sconnesso se $\forall x \in X$, la componente connessa $C(x) = \{x\}$.

- (i) Osservare che uno spazio topologico totalmente sconnesso è T_1 .
- (ii) Mostrare che uno spazio metrizzabile numerabile con almeno due punti è totalmente sconnesso.
- (iii) Concludere che le componenti connesse di uno spazio topologico X non sono necessariamente aperte.

Esercizio 5. Uno spazio topologico X si dice localmente connesso se ogni punto $p \in X$ contiene un intorno connesso di X .

- (i) Trovare un esempio di uno spazio connesso che non è localmente connesso e di uno spazio localmente connesso che non è connesso.
- (ii) Mostrare che le componenti connesse di uno spazio localmente connesso sono aperte.
- (iii) Mostrare che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.