

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico
2018/2019
GE220 - Geometria 3 - Quarto foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO
DA CONSEGNARE ENTRO: **3/06/2019**

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico. Si dimostri che le seguenti sono equivalenti:

- (i) ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ è omotopa a una applicazione costante;
- (ii) ogni applicazione continua $f : S^1 \rightarrow X$ si estende ad un'applicazione continua $g : D^2 \rightarrow X$.
- (iii) $\pi_1(X, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in X$.

(Si ricordi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$).

Esercizio 2. Sia $A \subset X$ un retratto per deformazione di uno spazio topologico X e $i : A \rightarrow X$ l'inclusione. Si dimostri che:

- (i) X e A sono omotopicamente equivalenti;
- (ii) Senza usare il risultato precedente, si dimostri che la mappa indotta da i sui gruppi fondamentali è un'isomorfismo.
- (iii) Concludere che S^1 non è un retratto di \mathbb{R}^2 .

Esercizio 3. Siano X_1 e X_2 spazi topologici.

- (i) Si dimostri che se X_1 e X_2 sono semplicemente connessi, allora il loro prodotto $X_1 \times X_2$ è semplicemente connesso.
- (ii) Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ rivestimenti. Allora il prodotto $(p_1, p_2) : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ è un rivestimento.
- (iii) Si determini il rivestimento universale del toro $T^2 = S^1 \times S^1$.