Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Primo esonero: 11/04/2019

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h30m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*12 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Allora $\overline{\mathrm{int(A)}} = \overline{A}$.*

R:

(ii) *Se la topologia su X è quella discreta, allora per qualunque sottoinsieme $A \subset X$, il derivato di A è vuoto.*

R:

(iii) *Un quoziente di uno spazio T_2 è T_2.*

R:

(iv) *Esiste un retratto di $\mathbb{R}^2$ sulla palla aperta $B_1(\underline{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.*

R:

(v) *Se X è di Lindelöf e esiste una applicazione continua e suriettiva $f : X \to Y$, allora Y è di Lindelöf.*

R:

(vi) *La retta reale $\mathbb{R}$ munita della topologia cofinita è compatta.*

R:

Esercizio 2. *(*7 punti*) Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice denso da nessuna parte se l'interno della sua chiusura è vuoto. Si dimostri che:*

(i) *Se $A \subset X$ è denso da nessuna parte allora $X \setminus A$ ha interno denso.*

(ii) *Se $A = \partial(U)$ è il bordo di un sottoinsieme aperto di X, allora A è un chiuso denso da nessuna parte.*

(iii) *Se A è chiuso e denso da nessuna parte allora A è il bordo di un'aperto di X.*

(iv) *Un denso da nessuna parte non è necessariamente chiuso.*

Esercizio 3. *(*5 punti*) Sia X uno spazio topologico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ una mappa continua. Si dimostri che*

(i) *La mappa f non può essere suriettiva.*

(ii) *L'imagine di f ammette un valore massimo e un valore minimo.*

(iii) *La mappa f induce una identificazione sulla sua imagine.*

Esercizio 4. *(*6 punti*) Siano X e Y spazi topologici e $f : X \to Y$ una applicazione. Si dimostri che*

(i) *Se f è continua e suriettiva e X è separabile, allora anche Y è separabile.*

(ii) *Se X e Y sono N_1, allora f è continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.*

(iii) *Se f è continua e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha un unico limite in X, è possibile che $f(x_n)$ abbia più di un limite in Y.*

Esercizio 5. *(*5 punti*) Sia X il prodotto di $\mathbb{R}$ munito della topologia Euclidea con l'insieme $\{0, 1\}$ munito della topologia banale. Mostrare che:*

(i) *X non è T_0, né T_1 nè T_2 ma è T_3 e T_4.*

(ii) *Siano $A := ([a, b] \times \{0\}) \cup ((a, b) \times \{1\})$ e $B := ((a, b) \times \{0\}) \cup ([a, b] \times \{1\})$. Mostrare che entrambi A e B sono compatti e che $A \cap B$ non è compatto.*