Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Primo esonero: 11/04/2019

Docente: Margarida Melo

Durata: 2h30m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. (12 punti) *Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Allora $\overline{\mathrm{int(A)}} = \overline{A}$.*

R: Falso. Ad esempio, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è tale che $\mathrm{int(Q)} = \emptyset$, quindi $\overline{\mathrm{int(A)}} = \emptyset$, anche se $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(ii) *Se la topologia su X è quella discreta, allora per qualunque sottoinsieme $A \subset X$, il derivato di A è vuoto.*

R: Vero. Infatti, dato $x \in X$, l'aperto $\{x\}$ non interseca $A \setminus \{x\}$.

(iii) *Un quoziente di uno spazio T_2 è T_2.*

R: Falso. Ad esempio, se $X = [0,1]$ e $A = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, X/A non è nemmeno T_1 (e quindi non è T_2) perché se $\pi : X \to X/A$ è la proiezione e $x \in A$, allora $[x] \in X/A$ non è un punto chiuso.

(iv) *Esiste un retratto di $\mathbb{R}^2$ sulla palla aperta $B_1(\underline{0}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.*

R: Falso. In uno spazio di Hausdorff l'imagine di un retratto coincide con il luogo dei punti che vengono fissati dell'applicazione, quindi deve essere un chiuso. Siccome $\mathbb{R}^2$ è di Hausdorff e $B_1(\underline{0})$ non è un chiuso, non può esistere un retratto da $\mathbb{R}^2$ in $B_1(\underline{0})$.

(v) *Se X è di Lindelöf e esiste una applicazione continua e suriettiva $f : X \to Y$, allora Y è di Lindelöf.*

R: Vero. Sia $\mathcal{U} = \{U\}_{U \in \mathcal{U}}$ un ricoprimento di Y. Allora $\{f^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ è un ricoprimento di X, quindi ammette un sottoricoprimento numerabile $\{f^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Quindi anche $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{U}$, quindi Y è di Lindelöf.

(vi) *La retta reale $\mathbb{R}$ munita della topologia cofinita è compatta.*

R: Vero. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Sia $U_0 \in \mathcal{U}$ non vuoto. Allora $X \setminus U_0 = \{x_1, \ldots, x_N\}$ è un numero finito di punti. Per ogni $i = 1, \ldots, N$ sia $U_i \in \mathcal{U}$ un aperto che contenga x_i. Allora $\{U_0, U_1, \ldots, U_N\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathbb{R}$, e quindi $\mathbb{R}$ con a topologia cofinita è compatto.

Esercizio 2. (7 punti) *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice denso da nessuna parte se l'interno della sua chiusura è vuoto. Si dimostri che:*

(i) *Se $A \subset X$ è denso da nessuna parte, allora $X \setminus A$ ha interno denso.*

(ii) *Se $A = \partial(U)$ è il bordo di un sottoinsieme aperto di X, allora A è un chiuso denso da nessuna parte.*

(iii) *Se A è chiuso e denso da nessuna parte allora A è il bordo di un'aperto di X.*

(iv) Un denso da nessuna parte non è necessariamente chiuso.

R:

(i) Sia $A \subset X$ tale che $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ e vediamo che $\overline{(X \setminus A)^\circ} = X$. Sia $U \subset X$ un'aperto non vuoto. Allora, siccome $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, U non può essere contenuto in $\overline{A}$, quindi $U \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Ma siccome $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$, otteniamo che U interseca l'interno di $X \setminus A$. Concludiamo quindi che $(X \setminus A)^\circ$ è denso in X.

(ii) Sia $U \subset X$ un'aperto e $A = \partial(U)$. Sia V un'aperto contenuto in $\partial(U)$. Siccome U è aperto, allora V non interseca U e quindi $V \subset X \setminus U$. Ma allora $X \setminus V$ è un chiuso che contiene U, e quindi $\overline{U} = U \cup \partial(U) \subset (X \setminus V)$, e quindi V deve essere vuoto.

(iii) Sia A chiuso e denso da nessuna parte e sia $U := X \setminus A$, vediamo che $A = \partial(U)$. Siccome U è aperto, da (i) abbiamo che $\overline{U} = X$, quindi $\partial(U) = \overline{U} \cap \overline{A} = X \cap A = A$.

(iv) Ad esempio $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ non è chiuso perché $\overline{X} = X \cup \{0\}$, anche se $\mathrm{int}(\overline{X}) = \emptyset$.

Esercizio 3. *(*5 punti*) Sia X uno spazio topologico compatto e $f : X \to \mathbb{R}$ una mappa continua. Si dimostri che*

(i) La mappa f non può essere suriettiva.

(ii) L'imagine di f ammette un valore massimo e un valore minimo.

(iii) La mappa f induce una identificazione sulla sua imagine.

R:

(i) L'imagine di un compatto tramite un'applicazione continua è un compatto. Siccome i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi e limitati, l'imagine di f non può essere $\mathbb{R}$.

(ii) Siccome $f(X) = [a, b]$, per certi $a, b \in \mathbb{R}$, il minimo di f è a e il massimo di f è b.

(iii) La mappa $f : X \to f(X)$ è continua e suriettiva, quindi per far vedere che è una identificazione basta far vedere che è anche chiusa. Sia $F \subset X$ un chiuso di X. Allora essendo X compatto, F è compatto, quindi $f(F)$ è un compatto. Siccome $\mathbb{R}$ è di Hausdorff, se $f(F)$ è compatto è per forza chiuso in $\mathbb{R}$, e quindi anche in $f(X)$ (essendo $f(X) \subset \mathbb{R}$ chiuso), quindi f è una mappa chiusa.

Esercizio 4. *(*6 punti*) Siano X e Y spazi topologici e $f : X \to Y$ una applicazione. Si dimostri che*

(i) Se f è continua e suriettiva e X è separabile, allora anche Y è separabile.

(ii) Se X e Y sono N_1, allora f è continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.

(iii) Se f è continua e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha un unico limite in X, è possibile che $f(x_n)$ abbia più di un limite in Y.

R:

(i) Sia $S \subset X$ un sottoinsieme denso e numerabile di X. Vediamo che anche $f(S) \subset Y$ è denso in Y. Sia $U \subset Y$ un'aperto. Allora $f^{-1}(U) \subset X$ è un'aperto non vuoto di X, perché f è suriettiva, quindi $f^{-1}(U) \cap S \neq \emptyset$. Ma questo implica che anche $U \cap f(S) \neq \emptyset$, quindi $f(S)$ è denso in Y.

(ii) Assumiamo che f sia continua e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente per un punto $L \in X$ e vediamo che la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge per $f(L)$. Sia U un'aperto di Y con $f(L) \in U$. Allora $f^{-1}(U)$ è un'aperto di X che contiene L, quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, $x_n \in f^{-1}(U)$. Quindi, per lo stesso valore di N abbiamo che $f(x_n) \in U$, per ogni $n \geq N$, quindi $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge per $f(L)$.

Supponiamo adesso che X e Y siano spazi N_1 e supponiamo che f trasforma successioni convergenti in successioni convergenti. Sia F un chiuso di Y e vediamo che $f^{-1}(F)$ è un chiuso di X. Sia $y \in \overline{f^{-1}(F)}$. Allora, siccome X è N_1, per un risultato visto a lezione, esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $f^{-1}(F)$ che converge per y, quindi per ipotesi $(f(x_n))$ converge per $f(y)$. Ma essendo F chiuso e $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in F, necessariamente $f(y) \in F$, il che implica che $y \in f^{-1}(F)$, ossia che $f^{-1}(F)$ è chiuso.

(iii) Sia $X = [0,1]$ e (x_n) una successione costante uguale a $\frac{1}{2}$ in X. Allora se prendiamo $A = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ e $Y = X/A$, allora la mappa quoziente $f : X \to Y$ è continua e l'imagine di (x_n) è una successione costante uguale a $[\frac{1}{2}]$. Ma questa successione converge sia che a $[\frac{1}{2}]$ che a $[\frac{1}{4}]$ e a $[\frac{3}{4}]$.

Esercizio 5. *(*5 punti*) Sia X il prodotto di $\mathbb{R}$ munito della topologia Euclidea con l'insieme $\{0,1\}$ munito della topologia banale. Mostrare che:*

(i) X non è T_0, né T_1 nè T_2 ma è T_3 e T_4.

(ii) Siano $A := ([a,b] \times \{0\}) \cup ((a,b) \times \{1\})$ e $B := ((a,b) \times \{0\}) \cup ([a,b] \times \{1\})$. Mostrare che entrambi A e B sono compatti e che $A \cap B$ non è compatto.

R:

(i) Siccome la topologia su $\{0,1\}$ è quella banale, gli aperti di X sono della forma $U \times \{0,1\}$, per un aperto U di $\mathbb{R}$. Quindi X non è T_2 perché punti del tipo $(a,0)$ e $(a,1)$, per ogni numero reale a, hanno gli stessi intorni, quindi non sono separabili da aperti. Non essendo T_2, X non può essere nemmeno T_1 né T_0.

(ii) A è compatto perché un ricoprimento aperto di A deve essere del tipo $\mathcal{U} = \{U \times \{0,1\}\}_{U\in\mathcal{U}}$, e quindi $\mathcal{U}' = \{U | U \in \mathcal{U}\}$ è un ricoprimento aperto di $[a,b]$. Siccome $\mathcal{U}'$ ammette un sottoricoprimento finito, anche $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito, e quindi A è compatto. Allo stesso modo, anche B è compatto. Invece $A \cap B = (a,b) \times \{0,1\}$ non è compatto perché la sua proiezione su $\mathbb{R}$ è uguale a (a,b), che non è compatto (infatti se $A \cap B$ fosse compatto, lo sarebbe stato anche la sua l'immagine tramite qualunque applicazione continua).