Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2018/2019

GE220 - Geometria 3 - Secondo esonero: 03/06/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 2h30m

Nome del candidato:
Numero di matricola:

Esercizio 1. *(*12 punti*) Sia X uno spazio topologico. Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Sia X metrico e totalmente limitato, allora X è limitato.

R:

(ii) Un sottospazio di uno spazio localmente compatto è localmente compatto.

R:

(iii) Gli spazi euclidei $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ non sono omeomorfi.

R:

(iv) Un sottospazio di uno spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso.

R:

(v) Il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus L$, dove $L \subset \mathbb{R}^3$ è una retta, è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

R:

(vi) Non esiste un rivestimento dal piano euclideo $\mathbb{R}^2$ in S^1.

R:

Esercizio 2. *(*6 punti*)*

(i) *Dare la definizione di spazio metrico completo e mostrare con un esempio che la completezza di uno spazio metrico non è invariante per omeomorfismo.*

(ii) *Sia X uno spazio topologico localmente compatto. Dimostrare che ogni sottospazio compatto possiede un intorno compatto, ossia che per ogni compatto $K \subset X$ esiste un compatto $H \subset X$ tale che $K \subset \mathrm{int(H)}$.*

Esercizio 3. *(*7 punti*) Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di tutte le rette di equazione $ax = by$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli.*

(i) *Determinare la decomposizione di X e di $X \setminus \{(0,0)\}$ in componenti connesse e componenti connesse per archi.*

(ii) *Provare che X è connesso ma non localmente connesso.*

(iii) *Osservare che $X \setminus \{(0,0)\}$ non può essere omotopicamente equivalente a X.*

Esercizio 4. *(*10 punti*)*

(i) *Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di uno sottospazio Y in uno spazio topologico X. Allora se esiste una retrazione $r : X \to Y$, la mappa $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$ è iniettiva.*

(ii) *Concludere che non esiste un retratto da D^2 in S^1.*

(iii) *Dimostrare il teorema del punto fisso di Brower in dimensione 2, i.e., che ogni applicazione continua $f : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso.*

(iv) *Enunciare il teorema di Van Kampen debole e dimostrare che S^n è semplicemente connesso, per $n \geq 2$.*

(v) *Dimostrare che S^2 non è contraibile in nessuno dei suoi punti. (Sug.: una eventuale omotopia con una applicazione costante induce una retrazione da D^2 in S^1 e usare (ii) per concludere).*

Esercizio 5. *(*6 punti*) Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi.*

(i) *Dimostrare che X è semplicemente connesso se e solo se ogni applicazione continua $f : S^1 \to X$ si estende ad un'applicazione continua $D^2 \to X$.*

(ii) *Se X ammette due rivestimenti $p_1 : X_1 \to X$ e $p_2 : X_2 \to X$, con X_1 e X_2 semplicementi connessi, allora esiste un isomorfismo di rivestimenti da (X_1, p_1) a (X_2, p_2).*