Munkres, Esercizio 26.12

Siano X, Y due spazi topologici con Y compatto e sia $p : X \to Y$ una funzione continua, suriettiva e chiusa tale che, per ogni $y \in Y$, la fibra $p^{-1}(y) \subseteq Y$ è compatta. Dimostrare che X è compatto.

(Suggerimento: usare il fatto che, se U è un aperto di X contenente $p^{-1}(y)$, esiste un intorno aperto W di y tale che $p^{-1}(W) \subseteq U$.)

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di X.

Per ogni $y \in Y$, si consideri il sottoinsieme $A_y \subseteq A$ dato dagli indici α tali che $p(U_\alpha)$ contiene y. Allora,

$$\bigcup_{A_y} U_\alpha \supseteq p^{-1}(y).$$

Poiché $p^{-1}(y)$ è compatto, esiste un intero m_y e indici $\alpha_1^y, \dots, \alpha_{m_y}^y$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{m_y} U_{\alpha_i^y} \supseteq p^{-1}(y);$$

si denoti con U_y tale unione. Poiché U_y è un aperto di X contenente $p^{-1}(y)$, esiste un intorno aperto W_y di y tale che $p^{-1}(W_y) \subseteq U_y$.

Si consideri il ricoprimento di Y dato da tutti gli aperti W_y al variare di $y \in Y$. Poiché Y è compatto, esiste un sottoinsieme finito $\{y_1, \dots, y_n\}$ di Y tale che

$$\bigcup_{j=1}^{n} W_{y_j} = Y.$$

In particolare,

$$X = p^{-1}(Y) = \bigcup_{j=1}^{n} p^{-1}(W_{y_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j}$$

Ora, ogni U_{y_j} è unione finita degli $U_{\alpha_i^{y_j}}$ per $i \in \{1, \dots, m_{y_j}\}$. Quindi,

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m_{y_j}} U_{\alpha_i^{y_j}};$$

ovvero, l'insieme degli $U_{\alpha_i^{y_j}}$ così scelti, al variare di i e j, è un sottoricoprimento finito di $\{U_\alpha\}$.