Primo Tutorato GE220

7 marzo 2019

A.A. 2018/2019

Docente: Margarida Melo

Esercitatore: Raffaele Carbone

Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1. *Sia $X := \{a, b, c, d, e\}$. Dire quali delle seguenti è una topologia di aperti per X.*

1. $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}\}$.
2. $\{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
3. $\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$

Esercizio 2. *Consideriamo su $\mathbb{N}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, \mathbb{N}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}_{k \in \mathbb{N}}\}$.*

1. *Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia di aperti $\mathbb{N}$. Lo è anche di chiusi?*
2. *Trovare i punti d'accumulazione dell'insime $\{10, 120, 2^{37} * \cdot 17!\}$*
3. *Determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tali che $A' = \mathbb{N}$.*

Esercizio 3. *In $\mathbb{R}$ sia S il sottoinsieme definito da*

$$S := \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. *Mostrare che $\bar{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea.*
2. *Mostrare che $\bar{S} = \mathbb{R}$ nella cofinita.*

Esercizio 4. *Siano X, Y spazi topologici ed $f : X \to Y$ iniettiva e continua e sia $Z \subset X$.*

1. *Mostrare che $f(Z') \subset f(Z)'$*
2. *Questo è ancora vero se non assumiamo l'iniettività di f?*

Esercizio 5. *Sia $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ ed } xy > 0\}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$. Dire se X è aperto o chiuso su $\mathbb{R}^2$, mostrare che $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ ed } x, y > 0\}$ è chiuso in X ma non in $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 6. *Sia X un insieme e $x_0 \in X$. Verifiicare che i seguenti sono operatori di chiusura su X*

1. *$C_1 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dato da*

$$C_1 : A \mapsto \begin{cases} \emptyset \text{ se } A = \emptyset \\ A \cup \{x_0\} \text{ altrimenti} \end{cases}$$

2. $C_2 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *dato da*

$$C_2 : A \mapsto \begin{cases} A \text{ se } A \text{ è finito} \\ X \text{ altrimenti} \end{cases}$$

dopo di che esibire delle topologie per X *per le quali la chiusura coincide rispettivamente con* C_1 *e* C_2.