

## Decimo Tutorato GE220

30 MAGGIO 2019

A.A. 2018/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE

TUTORI: GIOVANNI PASSERI, STEFANO SERPENTE

**Esercizio 1.** Siano  $X, Y$  due spazi topologici. Scelti poi  $x \in X$  e  $y \in Y$  consideriamo  $Z := (X \cup Y) / \sim$ , dove per ogni  $u, v \in X \cup Y$ , poniamo  $u \sim v$  se e solo se  $u = v$  oppure  $\{u, v\} = \{x, y\}$ . Mostrare che  $\pi_1(Z, [x])$  è isomorfo al prodotto libero di  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(Y, y)$ .

**Esercizio 2.** Mostrare che l'applicazione  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto 2^{2\pi iz}$  è un rivestimento.

**Esercizio 3.** Mostrare che  $p : E \rightarrow X$  e  $q : F \rightarrow Y$  due rivestimenti. Dimostrare che l'applicazione  $p \times q : E \times F \rightarrow X \times Y$ ,  $(e, f) \mapsto (p(e), q(f))$  è un rivestimento.

**Esercizio 4.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento. Mostrare che  $X$  è Hausdorff se e solo se  $E$  è Hausdorff.

**Esercizio 5.** Siano  $X, Y$  spazi topologici,  $Y$  discreto. Mostrare che la proiezione  $\pi : X \times Y \rightarrow Y$  è un rivestimento.

**Esercizio 6.** Sia  $X$  uno spazio topologico arcoconnesso ed  $x_0, x_1 \in X$ . Sia poi  $h : [0, 1] \rightarrow X$  un cammino da  $x_0$  ad  $x_1$ ; denotiamo poi con  $\bar{h}$  il cammino da  $x_1$  ad  $x_0$  che "percorre la stessa traccia al contrario", cioè  $h : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $s \mapsto h(1-s)$ . Consideriamo poi, per ogni cammino  $h$  da  $x_0$  a  $x_1$ , il corrispondente morfismo di cambio di punto base  $\beta_h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ ,  $[f] \mapsto [h \cdot f \cdot \bar{h}]$ . Mostrare che  $\pi_1(X)$  è abeliano se e solo se ogni morfismo di cambio di punto base dipende solo dai punti base scelti (cioè se per ogni  $x_0, x_1 \in X$  e per ogni  $h, k$  cammini da  $x_0$  ad  $x_1$  vale che  $\beta_h = \beta_k$ ).

(Sugg.: Notare che  $\bar{h}k$  è un laccio e che ogni laccio si può scomporre, in modo simile, come concatenazione di cammini)