Secondo Tutorato GE220

14 marzo 2019
A.A. 2018/2019
Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Raffaele Carbone
Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1. *Dire al variare delle topologie se* $id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ *è continua, aperta, chiusa*

1. $\mathcal{T} =$ *Topologia di Sorgenfrey,* $\mathcal{T}' =$ *Topologia euclidea*
2. $\mathcal{T} =$ *Topologia euclidea,* $\mathcal{T}' =$ *Topologia di Sorgenfrey*
3. $\mathcal{T} =$ *Topologia di Cofinita,* $\mathcal{T}' =$ *Topologia Euclidea*
4. $\mathcal{T} =$ *Topologia Euclidea,* $\mathcal{T}' =$ *Topologia Cofinita*

Esercizio 2. *Sia* $X \subset \mathbb{N}$ *l'insieme dei numeri maggiori o uguali a* 2. *Si consideri per ogni* $n \in X$

$$U_n := \{x \in X \mid x \mid n\}$$

Sia poi $\mathcal{B} := \{U_n \mid n \in X\}$.

1. *Mostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base per una topologia* τ *su* X.
2. *Si dimostri che per ogni* $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid x \mid y\}$.
3. *Sia* $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ *continua (dove sul codominio vi è la topologia euclidea), si dimostri che* f *è costante.*

Esercizio 3.
1. *Dimostrare che la famiglia* $\mathcal{F} := \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ *non è una base per alcuna topologia su* $\mathbb{R}$.
2. *Si determini la più piccola topologia su* $\mathbb{R}$ *per cui* $\mathcal{F}$ *è una famiglia di aperti.*
3. *Dimostrare che la famiglia* $\mathcal{G} := \{[a, b] \mid a < b,\ a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ *è una base per una topologia su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. *Mostrare che ognuna delle seguenti è una distanza su* $\mathbb{R}^n$*:*

1. $d(x, y) := ||x - y||$;
2. $d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
3. $d_\infty(x, y) := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|$.

Inoltre

Dimostrare inoltre che queste distanze sono topologicamente equivalenti e per $n = 2$, $r > 0$ fissato, disegnare $B(x, r)$.

Esercizio 5. *Uno spazio topologico X si dice* irriducibile *se non esistono chiusi propri $\emptyset \neq C, D \subsetneq X$ tali che $X = C \cup D$.*

1. *Si mostri che ogni spazio discreto con almeno due punti è riducibile.*
2. *Si mostri che la retta euclidea reale è riducibile.*
3. *Si mostri che ogni spazio infinito con la topologia cofinita è irriducibile.*

Esercizio 6. *Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della cofinita. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni.*

1. $$f(x) := \begin{cases} 3 \text{ se } x = 1 \\ \frac{x^2}{x-1} \text{ altrimenti} \end{cases}$$
2. $g(x) := \sin x$;
3. *Caratterizzare le funzioni continue da $\mathbb{R}$ con la cofinita in se stesso.*

Esercizio 7. *Sia X un insieme infinito munito della topologia cofinita. Si dimostri che X non è metrizzabile.*

Esercizio 8. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Consideriamo $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \min\{d(x, y), 1\}$. Mostrare che $\bar{d}$ è una distanza su X che induce su d la stessa topologia che vi induce d.*

Esercizio 9. *Mostrare che i sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ con l'euclidea con $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ definiscono i chiusi di una topologia strettamente meno fine di quella euclidea.*

Esercizio 10. *Sia (X, d) uno spazio metrico ed $x_0 \in X$. Mostrare che $d(x_0, -) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x_0, x)$ è continua.*

Dedurne poi che la funzione

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ è limitata}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

è un'applicazione continua, dove nel dominio è messa la topologia indotta dalla distanza infinito.

Esercizio 11. *Date due applicazioni $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ dimostrare che*

1. *Se f, g sono continue, allora $F : X \times Y \to X' \times Y', (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ è continua.*
2. *Se f, g sono aperte, allora F è aperta.*
3. *se f, g sono omeomorfismi, allora F è un omeomorfismo.*