Terzo Tutorato GE220

21 marzo 2019
A.A. 2018/2019
Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Raffaele Carbone
Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1. *Sia $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo $f \times g : X \times Z \to Y \times W,\ (x, z) \mapsto (f(x), g(z))$.*

1. *Mostrare che se f, g sono continue, allora $f \times g$ è continua.*
2. *Mostrare che se f, g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.*
3. *Mostrare con un esempio che se f e g sono chiuse $f \times g$ può non essere chiusa.*

Esercizio 2. *Ricordiamo che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X, si indica con $X/A = X/\sim_A$ il quoziente di X per la relazione di equivalenza data da*

$$x \sim_A y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Si dimostri che $I = [0, 1]$ e $I/[1/2, 1]$ sono omeomorfi.

Esercizio 3. *Sia $f : X \to Y$ continua ed aperta. Consideriamo la relazione su X, $x \sim y$ se e solo se $f(x) = f(y)$, per ogni $x, y \in X$. Sia $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione sul quoziente. Mostrare che esiste un embedding topologico $f^\sharp : X/\sim \to Y$ tale che il seguente diagramma commuti*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "f^\sharp"'] & \end{tikzcd}$$

Esercizio 4. *Mostrare che $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \approx \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$*
Suggerimento: usare $f : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$ definita da $f(x, t) = e^t x$

Esercizio 5. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, e sia $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ il suo grafico. Dimostrare che $G(f)$ è omeomorfo a X*

Esercizio 6. *Mostrare che uno spazio topologico X è Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$, vale che $\{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$.*

Esercizio 7. *Siano X' e X'' due spazi metrizzabili, d' e d'' due distanze rispettivamente su X' e X''. Dimostrare che $X' \times X''$ è metrizzabile.*
Suggerimento: mostrare che $d((x', x''), (y', y'')) = \max\{d'(x', y'), d''(x'', y'')\}$ è una distanza su $X' \times X''$ che induce la topologia prodotto.

Esercizio 8. *Adotteremo la seguente notazione: se X è uno spazio topologico e $Y \subset X$, X/Y è lo spazio topologico quoziente ottenuto con la relazione seguente: per ogni $x, y \in X$, $X \sim y$ se e solo se $x, y \in Y \vee x = y$.*

1. *Mostrare che $\mathbb{S}^1 \approx [0,1]/\{0,1\}$.*
2. *Mostrare che $\mathbb{S}^n \approx \mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$, dove $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$.*

Esercizio 9. *Definiamo una topologia sul piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$ come il quoziente $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$, dove per ogni $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \sim y$ se e solo se x ed y generano lo stesso sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Mostrare che il piano proiettivo reale è hausdorff.*

Consideriamo il "Nastro di Moebius", cioè lo spazio topologico M ottenuto quozientando $Q := [0,1] \times [0,1]$ sulla relazione $\sim_y$ che identifica $(0, y)$ con $(1, 1-y)$ per ogni $y \in [0,1]$. Mostrare che $M/\sim_x$, dove $\sim_x$ è la relazione che identifica $[(x,0)]_{\sim_y}$ con $[(1-x,1)]_{\sim_y}$, è omeomorfo al piano proiettivo reale.