Quarto Tutorato GE220

28 marzo 2019

A.A. 2018/2019

Docente: Margarida Melo

Esercitatore: Raffaele Carbone

Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1.

1. *Verificare che uno spazio topologico discreto è* T_i *per ogni* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. *Verificare che uno spazio topologico con la cofinita è* T_1 *e che è* T_4 *se e solo se lo spazio è finito.*
3. *Mostrare che* $\mathbb{R}$ *con la topologia della semicontinuità superiore* $\{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ *è* T_0 *ma non* T_1.

Esercizio 2. *Sia* X *uno spazio normale ed* $S \subset X$ *chiuso. Mostrare che* X/S *è normale.*

Esercizio 3.

1. *Consideriamo* $\mathbb{R}$ *con la topologia* $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{R}\}$. *Mostrare che questo spazio topologico è* $N2$.
2. *Mostrare che tutti gli spazi metrici sono* $N1$.
3. *Mostrare che il quoziente di uno spazio topologico* $N2$ *è* $N2$.

Esercizio 4. *Dimostrare che sottospazi e prodotti di spazi* T_x *sono ancora* T_x *per* $x = 1, 2, 3$.

Esercizio 5. *Sia* X *uno spazio topologico regolare ma non normale. Dimostrare che esiste un sottospazio chiuso* $A \subseteq X$ *tale che il quoziente* X/A *è di Hausdorff ma non regolare.*

Esercizio 6. *Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio topologico* X *è uno spazio* T_1 *se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di* X.

Esercizio 7. *Sia* $\mathbf{K}$ *la retta reale, munita della topologia di Sorgenfrey. Dimostrare che* $\mathbf{K}$ *è uno spazio di Lindelöf.*

Esercizio 8. *Sia* X *uno spazio* T_1. *Dimostrare che* X *è regolare se e solo se per ogni punto* $p \in X$ *e ogni aperto* U *contenente* p *esiste un aperto* V *tale che*

$$p \in V \subset \bar{V} \subset U$$

.