Quinto Tutorato GE220

4 aprile 2019
A.A. 2018/2019
Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Raffaele Carbone
Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una sua base. Verificare che X è compatto se e solo se per ogni ricoprimento di X, $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$, ammette un sottoricoprimento finito.*

Esercizio 2. *Su $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ consideriamo la relazione d'equivalenza $x \sim y$ se e solo se $y \in \{x, -x\}$. Mostrare che $S^n/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^n$. Dedurne che $\mathbb{P}^n$ è compatto e di Hausdorff e che $\mathbb{P}^1$ è omeomorfo ad S^1.*

Esercizio 3. *Consideriamo $\mathbb{R}$. Consideriamo su X la famiglia*

$$\tau := \{X \subset \mathbb{R} \mid X = \emptyset \ \vee \ \mathbb{R} \setminus X \text{ è compatto nella topologia euclidea}\}.$$

1. *Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.*
2. *Dire se $(\mathbb{R}, \tau)$ è $T0$, $T1$ o $T2$.*

Esercizio 4. *Consideriamo $\mathbb{Q}$ come sottospazio di $\mathbb{R}$. Mostrare che*

$$K := \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$$

è chiuso (in $\mathbb{Q}$) e limitato ma non compatto.

Esercizio 5. *Sia X un insieme e, scelto $Y \subset X$, mettiamo su di esso la topologia $\tau := \mathcal{P}(Y) \cup \{X\}$. Caratterizzare i sottoinsiemi compatti di X.*

Esercizio 6. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $x \mapsto 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $x \mapsto x$ altrimenti. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ meno fine tale che $f : (\mathbb{R}, \tau) \to \mathbb{R}$ è continua. Descrivere gli intorni aperti e la chiusura di $\{0\}, \{1\}, \{\pi\}$ in $(\mathbb{R}, \tau)$. Dire poi se $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.*

Esercizio 7. *Consideriamo il seguente spazio topologico detto* orecchino hawaiano*, $H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \partial B_{1/n}((\frac{1}{n}, 0))$ con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$. Mostrare che H è compatto.*

Esercizio 8. *Sia $\mathbb{R}_{scs}$ la retta reale munita della topologia della semicontinuità superiore.*

1. *Mostrare che $\mathbb{R}_{scs}$ non è compatta.*
2. *Mostrare che per ogni $W \subset \mathbb{R}_{scs}$, con la topologia di sottospazio, W è compatto se e solo se è limitato dal basso.*

Esercizio 9. *Sia* $Y := \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$*. Si consideri la seguente topologia su* $\mathbb{R}$*:*

$$\tau := \mathcal{P}(Y) \cup \{Z \subset \mathbb{R} \mid \{0, 1\} \cap Z \neq \emptyset \ \wedge \ Y \setminus Z| \text{ è finito } \}.$$

1. X *è* $T1$*?*
2. X *è Hausdorff?*
3. X *è compatto?*

Esercizio 10. *Sia* K *la retta di Sorgenfrey. Sia* $X := \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*

1. *Trovare il derivato di* X*.*
2. *Motrare che* $X \cup \{0\}$ *non è compatto in* K*.*
3. *Dire se* $X^- := \{x \in K \mid -x \in X \cup \{0\}\}$ *è compatto.*
4. *Sia* $D := \{0, 1\}$ *con la topologia discreta. Si dica se la seguente funzione è continua, aperta o chiusa:* $f : K \to K$, $f : x \mapsto 1$ *se* $x \geq 0$, $f : x \mapsto 0$ *altrimenti.*