

Sesto Tutorato GE220

2 MAGGIO 2019

A.A. 2018/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE

TUTORI: GIOVANNI PASSERI, STEFANO SERPENTE

Esercizio 1. *Dimostrare che la compattezza locale, la paracompattezza e la compattezza per successioni sono proprietà topologiche.*

Esercizio 2. *Sia X uno spazio topologico metrizzabile, e sia $Y \subset X$ un sottospazio. Mostrare che Y è compatto se e solo se è chiuso e compatto per successioni.*

Esercizio 3. *Sia X uno spazio metrico completo privo di punti isolati. Mostrare che X non è numerabile.*

Esercizio 4. *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff. Dimostrare che X è normale.*

Esercizio 5. *Provare le seguenti asserzioni:*

1. *Un sottospazio di uno spazio localmente compatto è localmente compatto*
2. *Un sottospazio di un paracompatto non è sempre paracompatto*
3. *Un sottospazio chiuso di un paracompatto è paracompatto*
4. *Il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto*
5. *Il prodotto di due spazi paracompatti non è sempre paracompatto*

Esercizio 6. *Sia X uno spazio topologico, e sia $A_{i \in I}$ una famiglia localmente finita di sottoinsiemi di X . Mostrare che*

$$\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}.$$

In particolare mostrare che l'unione di una famiglia localmente finita di chiusi è un chiuso.

Esercizio 7. *Sia X uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff. Mostrare che ogni punto $x \in X$ possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

Esercizio 8. *Sia \mathfrak{B} una base di uno spazio topologico X . Dimostrare che ogni ricoprimento aperto di X possiede raffinamenti fatti con aperti di \mathfrak{B} .*

Esercizio 9. *Sia X uno spazio metrizzabile non compatto. Mostrare che esiste una funzione continua non limitata da X in \mathbb{R} .*

Esercizio 10. *Dimostrare che \mathbb{Q} non è localmente compatto.*