

Settimo Tutorato GE220

9 MAGGIO 2019

A.A. 2018/2019

DOCENTE: MARGARIDA MELO

ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE

TUTORI: GIOVANNI PASSERI, STEFANO SERPENTE

Esercizio 1. Sia C_n la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/n$. ed $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Si dica se:

1. X connesso/ connesso per archi.
2. X è compatto.
3. $X \cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ è connesso / connesso per archi / compatto.

Esercizio 2. Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)(x + y) = 0\}$.

1. Verificare che E è connesso.
2. Verificare che $E \setminus \{(0, 0)\}$ ha quattro componenti connesse.
3. Mostrare che $E \not\cong \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 : $X := \{x^2 + y^2 = 1\}$, $Y := \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Dopo averli disegnati, mostrare che non sono omeomorfi.

Esercizio 4. Dimostrare che l'unione arbitraria di sottoinsiemi connessi per archi di uno spazio topologico aventi un punto in comune è connessa per archi.

Esercizio 5. Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^2 , detto Pettine del Topologo:

$$P := (\{0\} \times (0, 1]) \cup ((0, 1] \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \mid 0 < y \leq 1 \right\} \right)$$

1. Mostrare che P è connesso, ma non connesso per archi. (Sugg.: mostrare che un arco a tale che $a(0) \in \{0\} \times (0, 1]$ deve avere immagine $a(I) \subset \{0\} \times (0, 1]$).
2. Uno spazio topologico X si dice localmente connesso in un punto $x \in X$ se ogni intorno di x contiene un intorno connesso di x e si dice localmente connesso se è localmente connesso in ogni suo punto. Dire se P è localmente connesso ed eventualmente dire in quali punti non lo è.

Esercizio 6. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ è connesso per archi per ogni $n > 1$. (Sugg.: cominciare col caso $n = 2$).