Ottavo Tutorato GE220

16 maggio 2019
A.A. 2018/2019
Docente: Margarida Melo
Esercitatore: Raffaele Carbone
Tutori: Giovanni Passeri, Stefano Serpente

Esercizio 1. *Mostrare che* $X := \{(\frac{1}{s}\cos s, \frac{1}{s}\sin s) \mid s \in [1, +\infty)\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ *con la topologia di sottospazio è connesso per archi.*

Esercizio 2. *Sia* X *uno spazio topologico con la topologia discreta. Trovare le componenti connesse di* X*. Dedurne che una funzione* $f : Y \to X$*, con* Y *spazio topologico connesso, è continua se e solo se è costante.*

Esercizio 3. *Mostrare che* $GL_n(\mathbb{R})$ *ed* $O(n)$ *sono sottospazi sconnessi di* $\mathbb{R}^{n^2}$.

Esercizio 4. *Sia* S *un sottoinsieme numerabile di* $\mathbb{R}^n$*, con* $n \geq 2$*. Mostrare che* $\mathbb{R}^n \setminus S$ *è connesso per archi.*

Esercizio 5. *Un sottoinsieme* S *di* $\mathbb{R}^n$ *si dice* ***stellato*** *se esiste* $x \in S$ *tale che per ogni* $y \in S$ *il segmento di estremi* x *ed* y *è contenuto in* S*. Mostrare che uno spazio stellato è connesso per archi e contraibile.*

Esercizio 6. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme totalmente ordinato, con la topologia* $\mathcal{T} := \{\{x \in X \mid u \leq x\} \mid u \in X\} \cup \{X, \emptyset\}$*. Mostrare che ogni sottoinsieme di* X *è connesso.*

Esercizio 7. *Sia* X *uno spazio topologico ed* $x, y \in X$*: Dimostrare che le applicazioni costanti* c_x *e* c_y *sono omotope se e solo se* x *ed* y *appartengono alla stessa componente connessa per archi.*

Esercizio 8. *Consideriamo la mappa antipodale* $f : S^n \to S^n$*. Mostrare che se* n *è dispari, allora* f *è omotopa all'identità. (Sugg.: ricordare che se* n *è dispari, allora* $S^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid ||z|| = 1\}$*)*

Esercizio 9. *Sia* $Y \subset \mathbb{R}^2$ *convesso; mostrare che per ogni spazio topologico* X *due qualsiasi applicazioni continue* $f, g : X \to Y$ *sono omotope.*

Esercizio 10. *Siano* $f, g : S^n \to S^n$ *due mappe continue tali che* $f(x) \neq -g(x)$ *per ogni* $x \in S^n$*. Mostrare che* f *e* g *sono omotope.*