

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2024/2025
GE450 - Topologia Algebrica - Esercitazione 1

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1 (1 punto). Costruire un retratto per deformazione del cilindro $C := D^2 \times [0, 1]$ nel disco D^2 .

Esercizio 2 (1 punto). Costruire un retratto di deformazione da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in S^{n-1} .

Esercizio 3 (1 punto). Costruire una omotopia dal toro T^2 meno un punto al grafo G con un solo vertice e due lacci che incidono su questo vertice. (Sug. Considerare la presentazione del toro T^2 come quoziente da un rettangolo identificando i lati due a due.)

Esercizio 4 (1 punto). (i) Mostrare che la relazione di equivalenza omotopica è di equivalenza.

(ii) Mostrare che un mappa omotopa a una equivalenza omotopica è una equivalenza omotopica.

Esercizio 5 (1 punto). Un retratto per deformazione in senso debole di uno spazio X in uno sottospazio A è una omotopia $f_t : X \rightarrow X$ tale che $f_0 = \text{id}_X$, $f_1(X) \subset A$ e $f_t(A) \subset A$, per ogni $t \in I$. Mostrare che se A è un retratto per deformazione di X in senso debole, allora l'inclusione $i : A \hookrightarrow X$ è una equivalenza omotopica.

Esercizio 6 (1 punto). Mostrare che se uno spazio X ammette un retratto per deformazione su un punto $x \in X$, allora per ogni intorno U di x in X , esiste un intorno $V \subset U$ di x tale che l'inclusione $V \hookrightarrow U$ è nullomotopica.

Esercizio 7 (2 punti). Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ consistendo nel segmento orizzontale $[0, 1] \times \{0\}$ insieme ai segmenti verticali $\{r\} \times [0, 1 - r]$, per $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

(i) Mostrare che qualsiasi punto sul segmento $[0, 1] \times \{0\}$ è retratto per deformazione di X , ma nessun altro punto di X lo è.

(ii) Sia Y ottenuto incollando due coppie di X attraverso l'identificazione $(x, 0) = (0, x)$, per $x \in [0, 1]$. Mostrare che Y è contraibile e determinare possibili punti di Y su cui Y ammetta un retratto per deformazione.

(iii) Costruire, a partire da Y , uno spazio contraibile che non ammetta retratti per deformazione su nessuno dei suoi punti. (Sugg. iterare la procedura di incollamento utilizzata per produrre Y).

Esercizio 8 (2 punti). Mostrare che $X \cong Y$ se e soltanto se $\exists Z \supset X, Y$ tale che X ed Y sono retratti per deformazione di Z . (Sugg. usare il cilindro mappante M_f di una equivalenza omotopica $f : X \rightarrow Y$).

Esercizio 9 (1 punto). Descrivere una struttura di CW complesso su S^n che renda ogni S^k un sottocomplesso di S^n , per $k \leq n$.

Esercizio 10 (1 punto). Dati interi positivi v, e, f soddisfacendo la relazione $v - e + f = 2$, mostrare che esiste una struttura di complesso cellulare su S^2 avente v 0-cellule, e 1-cellule e f 2-cellule.