Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018

GE460 - Teoria dei grafi - Primo Appello: 02/02/2018

Docente: Margarida Melo

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. (12 pt) *Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) *Il grafo completo* K^4 *è bipartito.*

R:

(ii) *Il grafo bipartito completo* $K^{n,m}$ *è planare se e soltanto se* $\min\{n, m\} \leq 2$.

R:

(iii) *Il duale geometrico di un grafo planare* 3*-connesso è semplice.*

R:

(iv) *Sia* G *un grafo e sia* $M = M(G)$ *il matroide grafico associato a* G. *Allora* M *è connesso se e soltanto se* G *è connesso.*

R:

(v) *Il duale di un matroide Euleriano è bipartito.*

R:

(vi) *Sia* $e \in E(M)$ *un coloop di un matroide* M *e sia* B *una base di* M. *Allora* $e \in B$.

R:

Esercizio 2. *(*6 pt*) Sia G un grafo e sia $e \in E(G)$ un lato di G. Sia $t(G)$ il numero di foreste generanti di G.*

(i) Nel caso in cui G è 2-connesso per lati e non ha cappi, mostrare che vale $t(G) \geq |E(G)|$. Quando vale l'uguaglianza?

(ii) Si dimostri che vale la formula $t(G) = t(G \setminus e) + t(G/e)$.

(iii) Calcolare $t(K^4)$ con due metodi diversi: usando la formula precedente e usando il matrix tree theorem.

Esercizio 3. *(*8 pt*) Sia G un grafo orientato com n vertici e c componenti connesse e sia D la matrice di incidenza di di G (considerando l'orientazione su G).*

(i) Dimostrare, utilizzando D, il Handshaking Dilemma, cioè, che

$$\sum_{v \in V(G)} \mathrm{indeg}(v) = \sum_{v \in V(G)} \mathrm{outdeg}(v).$$

(ii) Dimostrare che $\mathrm{rk}(D) = n - c$.

(iii) Sia $D : C_1(G) \to C_0(G)$, dove $C_0(G) := \mathbb{C}^{V(G)}$ e $C_1(G) := \mathbb{C}^{E(G)}$, la mappa indotta da D. Sia $F \subset E(G)$ una foresta generante di G. Si descriva il sistema fondamentale di cicli di G associato a F, $\mathcal{C}_F$ e si dimostri che $\mathcal{C}_F$ è una base dello spazio nullo di D.

Esercizio 4. *(*6 pt*) Un sottoinsieme $A \subset E$ in un matroide M in E si chiama un **flat** se $\mathrm{rk}(A \cup x) > \mathrm{rk}(A), \forall x \in A^c$. Un flat proprio massimale si chiama un **iperpiano** di M.*

(i) Si dimostri che se $C \subset E$ è un circuito di M allora, $\forall x \in C$, $\mathrm{rk}(C \setminus \{x\}) = |X| - 1 = \mathrm{rk}(C)$, quindi $C \setminus \{x\}$ non può essere un flat di M.

(ii) Si dimostri che se A è un iperpiano allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(M) - 1$ e che A è un iperpiano se e soltanto il suo complemento è un cocircuito di M.

(iii) Si concluda che dati un circuito e un cocircuito di un matroide, la loro intersezione non può avere cardinalità 1.

Esercizio 5. *(*6 pt*) Sia G un grafo e sia $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(E(G))$ la collezione dei sottoinsiemi di lati di G che non contengono cicli.*

1. *Si dimostri che $M = M(E(G), \mathcal{I})$ è un matroide, dove $\mathcal{I}$ è la collezione degli elementi indipendenti di M.*
2. *Si dimostri che M è un matroide binario.*
3. *Dopo aver descrito il matroide cografico associato a G, concludere che anche lui è un matroide binario.*