Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018

GE460 - Teoria dei grafi - Secondo Appello: 23/02/2018

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Durata: 3h15m

Nome del candidato:

Numero di matricola:

Esercizio 1. *(* 12 pt*) Stabilire, giustificando, se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.*

(i) Il grafo bipartito completo $K^{3,5}$ è Euleriano.

R:

(ii) Una mappa rappresentabile da un grafo (planare) G è 2-colorabile (f) se e solo se G è un grafo Euleriano.

R:

(iii) Un grafo semplice 6-regolare non può essere planare.

R:

(iv) Sia G un grafo non banale e sia $\kappa(G)$ (risp. $\lambda(G)$) la sua connetività per vertici (risp. lati). Allora si ha che $\lambda(G) \leq \kappa(G)$.

R:

(v) Il matroide cografico $M^*(K^5)$ associato al grafo completo K^5 è isomorfo a un matroide grafico.

R:

(vi) In un matroide M possono esistere elementi che siano sia che loops che coloops di M.

R:

Esercizio 2. *(*6 pt*) Sia G un grafo connesso planare semplice con n vertici e m lati. Si dimostri che:*

(i) *Vale la disuguaglianza $m \leq 3n - 6$;*

(ii) *Se G non contiene triangoli, allora G contiene un vertice di grado minore o uguale a 3;*

(iii) *Se G non contiene triangoli, vale il teorema dei 4 colori, ossia $\chi(G) \leq 4$.*

Esercizio 3. *(*8 pt*) Sia E un'insieme finito non-vuoto e $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_n)$ una famiglia di sottoinsiemi di E.*

(i) *Si dia un'enunciato del Teorema di Hall.*

(ii) *Un rettangolo latino è una matrice $M = (m_{i,j})_{m\times n}$, con $m \leq n$ e tale che $1 \leq m_{i,j} \leq n$, senza ripetizioni nè nelle righe nè nelle colone di M. Si dimostri che è sempre possibile completare M a un quadrato latino, cioè, un rettangolo latino con $m = n$.*

(iii) *Si dimostri che $M(\mathcal{F}) = M(E, \mathcal{I})$, dove l'insieme degli elementi indipendenti $\mathcal{I}$ è la collezione dei trasversali parziali di $\mathcal{F}$, forma un matroide.*

(iv) *Si dimostri che, dato $X \subset E$, X contiene un trasversale parziale di $\mathcal{F}$ di ordine t se e soltanto se $\forall A \subset \{1, \ldots, m\}$,*

$$|(\cup_{j\in A} S_j) \cap X| \geq |A| + t - m.$$

Esercizio 4. *(*6 pt*) Sia G un grafo orientato e D la matrice di incidenza di G di G. Si dimostri che*

(i) *D è una matrice totalmente unimodulare.*

(ii) *La matrice $Q := DD^T$, detta la matrice Laplaciana di G, non dipende della orientazione di G.*

(iii) *Se G ha c componenti connesse, allora $\mathrm{rk}(Q) = \mathrm{rk}(D) = n - c$.*

(iv) *La matrice aggiunta di Q è nulla se e soltanto se G è sconnesso.*

Esercizio 5. *(*8 pt*) Sia M un matroide. Un sottoinsieme $X \subset E(M)$ si dice* ***generante*** *se $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(M)$.*

(i) *Si dimostri che M è connesso se e soltanto se ogni coppia di elementi di M appartiene a un circuito.*

(ii) *Si dimostri che $A \subset E(M)$ è un'iperpiano se e soltanto se A è un insieme non generante massimale.*

(iii) *Si dimostri che se $M = M(G)$ è un matroide grafico, allora $H \subset E(G)$ è un'iperpiano se e soltanto se H^c è un taglio minimale di G.*

(iv) *Si dimostri che se G e H sono 3-connessi, allora $G \cong H$ se e soltanto se $M(G) \cong M(H)$.*