Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018

GE460 - Teoria dei grafi - Primo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **17/10/2017**

Esercizio 1. *Si ricordi il risultato fatto a lezione, conosciuto anche come "Handshaking Lemma", secondo cui ogni grafo ha un numero pari di vertici di grado dispari. Si dia una dimostrazione di questo fatto utilizzando la matrice di incidenza del grafo.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo semplice con n vertici e m lati. Si dimostri che:*

(i) $m \leq \binom{n}{2}$ *e determinare quando vale l'uguale;*

(ii) se $m > \binom{n-1}{2}$ *allora G è connesso e dimostrare che la disuguaglianza è stretta.*

(iii) se $\delta > \frac{n-2}{2}$ *allora G è connesso e dimostrare che la disuguaglianza è sempre stretta.*

Esercizio 3. *(i) Si dimostri che in un gruppo di almeno due persone, esistono almeno due che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo.*

(ii) Descrivere un gruppo di 5 persone tale che ogni due persone tra loro hanno esattamente un amico in comune. È possibile trovare un gruppo di 4 persone con questa proprietà?

Esercizio 4. *Si dimostri che:*

(i) ogni cammino è un grafo bipartito;

(ii) un ciclo è bipartito se e soltanto se ha lunghezza pari;

(iii) se $G = G[X, Y]$ *è bipartito e regolare allora* $|X| = |Y|$.

Esercizio 5. *Si dimostri che per ogni grafo non banale, si ha che*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Esercizio 6. *Un grafo semplice si dice auto-complementare se è isomorfo al suo grafo complementare* $\overline{G}$.

(i) Si dimostri che se G è auto-complementare allora $|V(G)| = 4k$ *o* $4k + 1$, *dove k è un intero.*

(ii) Si dimostri che, per un grafo qualsiasi, $Aut(G) \cong Aut(\overline{G})$.

Esercizio 7. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G. Per definizione, un autovalore di G è un autovalore di A e il polinomio caratteristico di G è il polinomio caratteristico di A. Si dimostri che:*

(i) *tutti gli autovalori di G sono reali e quello razionali sono interi;*

(ii) *se G è k-regolare, allora k è un autovalore di G con autovettore $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$;*

(iii) *nessun autovalore di G ha valore assoluto più grandi di Δ;*

(iv) *se G è connesso e Δ è un autovalore di G allora G è regolare;*

(v) *se G è connesso e $-\Delta$ è un autovalore di G, allora G è regolare e bipartito.*

Esercizio 8. *(i)* *Si dimostri che, se esistono due cicli distinti di un grafo G contenendo un certo lato e, allora G ha un ciclo che non contiene e.*

(ii) *Si dimostri un risultato analogo sostituendo "ciclo" con "taglio".*

(iii) *Si dimostri che, dati un ciclo C e un taglio C^* di un grafo G, allora C e C^* hanno un numero pari di lati in comune.*

Esercizio 9. *Un insieme $E \subset E(G)$ di lati di G si dice indipendente se E non contiene alcun ciclo di G. Si dimostri che*

(i) *qualsiasi sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente;*

(ii) *Se I e J sono insiemi indipendenti e $|J| > |I|$, allora esiste un lato e che appartiene a J ma non a I e tale che $I \cup \{e\}$ è ancora indipendente.*

(iii) *Si dimostri che (i) e (ii) rimangono validi sostituendo la parola "ciclo" per "taglio".*

Esercizio 10. *(i)* *Per quali valori di n è Euleriano il grafo completo K^n?*

(ii) *Per quali valori di k è Euleriano il $k-$cubo Q^k?*

(iii) *Quali grafi bipartiti sono Euleriani?*