Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018

GE460 - Teoria dei grafi - Secondo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **14/11/2017**

Esercizio 1. *(i) Sia n un numero dispari e sia G il grafo ottenuto prendendo due coppie di* $K^{\frac{n+1}{2}}$ *e identificandole tramite un vertice. Mostrare che G non è Hamiltoniano.*

(ii) Più in generale, osservare che se G è Hamiltoniano allora la connettività di G è maggiore o uguale a 2.

(iii) Mostrare, usando (i), che il teorema di Dirac è ottimale.

Esercizio 2. *Sia G un grafo connesso.*

(i) Si dimostri che esiste una biezione tra gli alberi generanti di G che contengono e e gli alberi generanti di G/e.

(ii) Si dimostri che $t(G) = t(G/e) + t(G - e)$*, dove* $t(G)$ *indica il numero di alberi generanti di G.*

Esercizio 3. *(i) Sia G un grafo senza cappi né tagli. Mostrare che* $t(G) \geq |E(G)|$.

(ii) Per quali grafi G vale l'uguaglianza?

Esercizio 4. *Sia G un grafo semplice e* $E(G)$ *l'insieme dei suoi lati. Lo spazio vettoriale V associato a G è lo spazio vettoriale su* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *i cui elementi sono sottoinisiemi di* $E(G)$*, con la somma tra due sottoinsiemi E e F data della differenza simmetrica (l'insieme degli elementi che stano in E o in F ma non in entrambi gli insiemi) e prodotto scalare definito ponendo* $1.E = E$ *e* $0.E = 0$*. Si dimostri che:*

(i) Queste operazioni definiscono uno spazio vettoriale e trovare una sua base;

(ii) I sottoinsiemi di $E(V)$ *formati dai cicli di G forma un sottospazio W di V (W viene chiamato il "cycle space di G");*

(iii) I sottoinsiemi fatti da unioni di tagli disgiunti di G forma un sottospazio W^* *di V* (W^* *viene chiamato il "cutset space di G");*

(iv) Se G è connesso e T è un'albero generante di G, lo spazio fondamentale dei cicli associato a T forma una base di W;

(v) Si ottenga un risultato analogo per lo spazio W^*.

(vi) Indicare le dimensioni di W e di W^*.

Esercizio 5. *(i) Per quali valori di n il grafo completo K^n è planare?*

(ii) Per quali valori di n, m il grafo bipartito completo $K^{n,m}$ è planare?

Esercizio 6. *Sia G un grafo planare connesso e G^* il suo duale geometrico.*

(i) Mostrare che se G è 3-connesso, allora G^* è semplice.

(ii) Mostrare che G è bipartito se e solo se G^* è Euleriano.

Esercizio 7. *Sia G un grafo che ammette un duale astratto G^*. Mostrare che*

(i) Un sottografo di G ammette un duale astratto.

(ii) Un grafo omeomorfo a G ammette un duale astratto.

(iii) Il grafo completo K^5 non ammette un duale astratto.

Esercizio 8. *Sia G un grafo semplice con n vertici e regolare di grado d. Mostrare che $\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}$.*

Esercizio 9. *Sia G un grafo semplice planare che non contiene triangoli.*

(i) Usando la formula di Euler, mostrare che G contiene un vertice di grado minore o uguale a 3;

(ii) Usando induzione, mostrare che $\chi(G) \leq 4$.