Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018

GE460 - Teoria dei grafi - Terzo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE ENTRO: **7/12/2017**

Esercizio 1. *Dato un grafo diretto G e $v \in V(G)$, si denoti con* $\mathrm{indeg(v)}$ *il numero di archi della forma uv e con* $\mathrm{outdeg(v)}$ *il numero di archi della forma vw, con $u, w \in V(G)$. Si dimostri che*

(i) $\sum_{v\in V(G)} \mathrm{indeg(v)} = \sum_{\mathrm{v}\in\mathrm{V(G)}} \mathrm{outdeg(v)}$ *(questo risultato è conosciuto come il Hanshaking Dilemma).*

(ii) G è Euleriano (i.e., esiste un ciclo diretto contenendo tutti gli archi di G) se e solo se $\forall v \in V(G), \mathrm{indeg(v)} = \mathrm{outdeg(v)}$.

Esercizio 2. *In una azienda si vogliono assegnare delle tarefe ai lavoratori a seconda delle loro competenza. Se ogni tarefa deve essere svolta da almeno 3 lavoratori si diano condizioni sul numero di lavoratori abili per ciascuna tarefa in modo da riuscire ad assegnare tutte le tarefe. (Sug. rappresentare il problema usando un grafo binario e applicare il Teorema di Hall).*

Esercizio 3. *Sia E un'insieme finito non-vuoto e $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_n)$ una famiglia di sottoinsiemi di E.*

(i) Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ trasversali di $\mathcal{F}$ e x un'elemento di $\mathcal{T}_1$. Si dimostri che esiste un'elemento $y \in \mathcal{T}_2$ tale che $\mathcal{T}_1 \setminus \{x\} \cup \{y\}$ è un trasversale di $\mathcal{F}$.

(ii) Si ricordi che dato $A \subset E$, il rango di A è il numero $\mathrm{rk}(A)$ di elementi del trasversale più grandi di $\mathcal{F}$ contenuto in A. Si dimostri che:

  (a) $0 < \mathrm{rk}(A) < |A|$;

  (b) se $A \subset B \subset E$, allora $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(B)$;

  (c) Dati $A, B \subset E$, allora $\mathrm{rk}(A \cup B) + \mathrm{rk}(A \cap B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$.

Esercizio 4. *Si dimostri che un matroide M si può definire attraverso un insieme $E \neq \emptyset$ e una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di M chiamati cicli o circuiti tali che*

(i) Un ciclo non contiene propriamente nessun altro ciclo;

(ii) Dati due cicli distinti C_1 e C_2 e un elemento $e \in C_1 \cap C_2$, esiste un circuito C_3 in $C_1 \cup C_2$ che non contiene e.

Esercizio 5. *Si dia un'enunciato matroidale e si dimostri un analogo dell'algoritmo "greedy" per matroidi.*

Esercizio 6. *Si dimostri che $M(K^4)$ non è un matroide trasversale e che $M(K^5)$ e $M(K^{3,3})$ non sono matroidi cografici.*

Esercizio 7. *Si dimostri che se M soddisfa alcuna delle seguenti condizioni, allora anche un suo minore le soddisfa:*

(i) *grafico;*

(ii) *cografico;*

(iii) *regolare;*

(iv) *binario.*

Esercizio 8. *Sia M un matroide e $A \subset E$ un sottoinsieme del insieme basico E di M. Si dimostri che il matroide contratto $M.A$ è il matroide i cui cocicli sono precisamente i cocicli di M che non sono contenuti in A.*

Esercizio 9. *Siano C e C^* rispettivamente un ciclo e un cociclo di un matroide M. Si dimostri che $|C \cap C^*| \neq 1$.*

Esercizio 10. *Sia M un matroide binario in un insieme E.*

(i) *Si dimostri che se M è Euleriano, allora M^* è bipartito;*

(ii) *Usando induzione su $|E|$, dimostrare che vale il vice-versa.*

(iii) *Usando il matroide 5-uniforme in 11 elementi, mostrare che l'ipotesi sulla binarietà è necessaria.*