Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2017/2018
GE460 - Teoria dei grafi - Quarto foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare entro: **30/01/2018**

Esercizio 1. *Un sottoinsieme $A \subset E$ in un matroide M in E si chiama un **flat** se $\mathrm{rk}(A \cup x) > \mathrm{rk}(A), \forall x \in A^c$. Un flat proprio massimale si chiama un **iperpiano** di M.*

(i) Si dimostri che l'insieme dei flat ordinati per inclusione forma un reticolo, i.e., un insieme parzialmente ordinato per inclusione in cui qualsiasi sottoinsieme ha un supremo e un infimo.

(ii) Si dimostri che se $C \subset E$ è un circuito di M allora, $\forall x \in C$, $\mathrm{rk}(C\ x) = |X| - 1 = \mathrm{rk}(C)$, quindi $C\ x$ non può essere un flat di M.

(iii) Si dimostri che se A è un iperpiano allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(M) - 1$ e che A è un iperpiano se e soltanto il suo complemento è un cocircuito di M.

(iv) Si concluda che dati un circuito e un cocircuito di un matroide, la loro intersezione non può avere cardinalità 1.

Esercizio 2. *Sia $E \neq \emptyset$ un insieme e $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_m)$ e $\mathcal{G} = (T_1, \ldots, T_m)$ sottoinsiemei non vuoti di E.*

(i) Si dimostri che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno un trasversale comune se e soltanto se, $\forall A, B \subset \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$|(\cup_{i \in A} S_i) \cap (\cup_{j \in B} T_j)| \geq |A| + |B| - m.$$

(ii) Si concluda che, dato $X \subset E$, X contiene un trasversale parziale di $\mathcal{F}$ di ordine t se e soltanto se $\forall A \subset \{1, \ldots, m\}$,

$$|(\cup_{j \in A} S_j) \cap X| \geq |A| + t - m.$$

Esercizio 3. *Utilizzando il "Kirchoff's matrix tree theorem", mostrare che il numero di alberi generanti di K_n è uguale a n^{n-2} (questo risultato è stato inizialmente dimostrato da Cayley nel 1889).*

Esercizio 4. *Sia G un grafo k-regolare e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori della matrice di adiacenza di G. Si dimostri che allora gli autovalori della matrice Laplaciana di G sono uguali a $k - \lambda_1, \ldots, k - \lambda_n$.*

Esercizio 5. *Sia M un matroide in un insieme E e sia $e \in E$.*

(i) Si dimostri che e è un coloop se e solo se $\mathrm{rk}(E \setminus e) = \mathrm{rk}(E) - 1$, cioè se e appartiene a tutte le basi di M.

(ii) Dato un'altro elemento $f \neq e$, si dimostri che $(M \setminus e)/f = (M/f) \setminus e$;

(iii) Se e è un loop o un coloop, allora $M \setminus e \cong M/e$ e $M = M|\{e\} \oplus M \setminus e$.

Esercizio 6. *(i) Si dimostri che un matroide M è connesso se e soltanto se ogni coppia di elementi appartiene a un circuito.*

(ii) Se $M = M_1 \oplus M_2$ si dimostri che $\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(M_1)\mathrm{rk}(M_2)$.

Esercizio 7. *Dato un G un grafo e $v \in V(G)$ un vertice, sia $\kappa(G, v)$ il numero di orientazioni acicliche di G avendo v come unica sorgente.*

(i) Mostrare che, dato $e \in E(G)$ vale la formula di contrazione/restrizione seguente:

$$\kappa(G, v) = \begin{cases} 0 \text{ se } G \text{ contiene un loop;} \\ \kappa(G/e, v) \text{ se } e \text{ è un cut-edge;} \\ \kappa(G/e, v) + \kappa(G \setminus e, v) \text{ altrimente.} \end{cases}$$

(ii) Esprimere $\kappa(G, v)$ come un polinomio utilizzando il polinomio rango.

(iii) Applicare il risultato per trovare questo numero nel caso in cui G è il grafo di Petersen.

Esercizio 8. *Sia G un grafo orientato e D la sua matrice di incidenza. Dato un intero $q > 0$, un q-**flow** non nullo è un vettore $x = (\mathbb{Z}_q \setminus 0)^{E(G)}$ tale che $Dx \equiv 0$. Sia $F(G, q)$ il numero di tali q-flows di G.*

(i) Si dimostri che $F(G, q)$ soddisfa la seguente relazione

$$F(G, q) = \begin{cases} (q-1)F(G \setminus e, q) \text{ se } e \text{ è un loop di } G; \\ 0 \text{ se } G \text{ contiene un cut-edge;} \\ F(G/e, q) - F(G \setminus e, q) \text{ altrimente.} \end{cases}$$

(ii) Esprimere $F(G, q)$ come un polinomio utilizzando il polinomio rango.