COLORAZIONE DI GRAFI

Benedetta Poles

Roma, 05/06/2020

AGENDA

1. Colorazione di Vertici
2. Colorazione di Mappe
3. Colorazione di Lati
4. Polinomio cromatico

Colorazione di Vertici

Introduzione

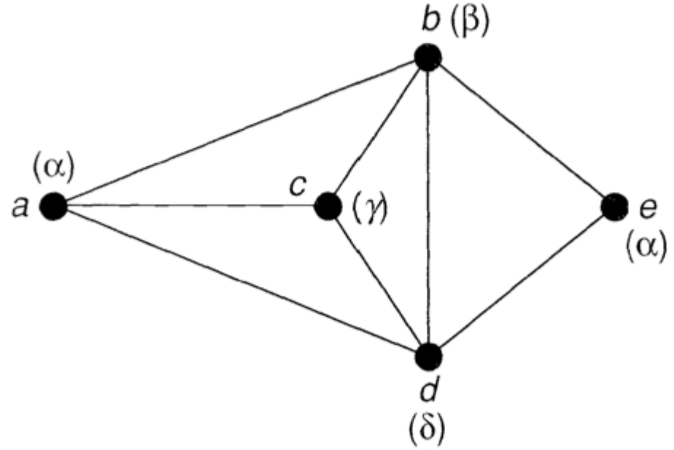
Introduciamo con un esempio un’applicazione della colorazione dei vertici di un grafo.
Supponiamo che un chimico voglia conservare 5 sostanze chimiche, che indichiamo con a,b,c,d,e, in varie aree di un magazzino.
Alcune di queste sostanze entrando in contatto potrebbero innescare una violenta reazione, dunque devono necessariamente essere tenute in aree diverse.
Nella seguente tabella l’asterisco indica le sostanze che devono essere tenute separate.
La domanda che ci poniamo è la seguente: **quante aree sono necessarie** ?

	a	b	c	d	e
a	–	*	*	*	–
b	*	–	*	*	*
c	*	*	–	*	–
d	*	*	*	–	*
e	–	*	–	*	–

Colorazione di Vertici

Introduzione

Per rispondere a questa domanda tracciamo un grafo G = (V,E) i cui vertici corrispondono alle 5 sostanze chimiche, e sono adiacenti ogni ogni volta che le sostanze chimiche corrispondenti devono essere tenute separate.
Se ora coloriamo i vertici notiamo che i colori corrispondono alle aree necessarie.
In questo caso il numero cromatico è 4, e dunque abbiamo bisogno di 4 aree.
Ad esempio le sostanze a ed e possono essere conservate nell'area *α,* mentre le sostanze b,c e d nelle aree *β γ e δ* rispettivamente.



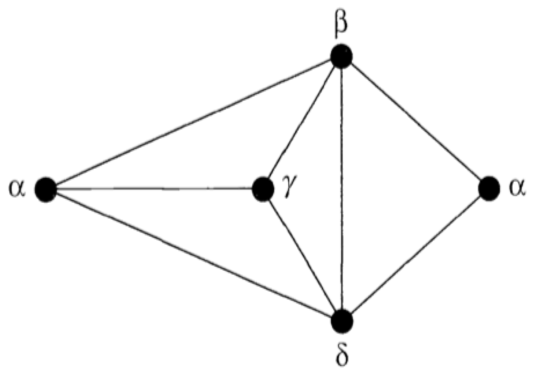
Colorazione di Vertici

Definizioni

Definizione 1:
Se G è un grafo senza cappi, allora G è **k- colorabile** se possiamo assegnare uno dei k colori ad ogni vertice in modo tale che vertici adiacenti abbiano colori diversi.

Definizione 2:
Se G è k-colorabile, ma non (k-1)-colorabile diciamo che G è k-cromatico, o che il **numero cromatico** di G è K e lo indichiamo con $\chi(G) = k$.

Esempio1:
La figura mostra un grafo con indice cromatico
$\chi(G) = 4$.
E quindi è k- colorabile se k ≥ 4.



Colorazione di Vertici

Osservazioni

Osservazione1:
Supporremo che tutti i grafi siano semplici, poiché la presenza i lati multipli è irrilevante per la nostra discussione, e inoltre assumeremo che siano connessi.

Osservazione2:
Notiamo che:

i. $\chi(Kn)$ = n
ii. $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ è un grafo nullo
iii. $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ è un grafo bipartito.
iv. Ogni albero è 2-colorabile come qualsiasi ciclo con un numero pari di vertici.

Colorazione di Vertici

Osservazioni

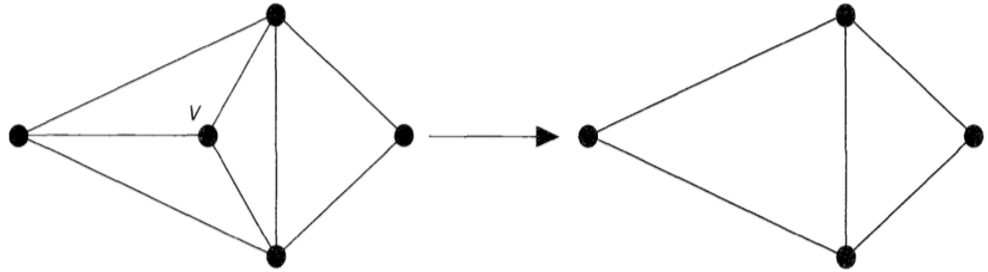
<u>Osservazione3:</u>
C’è poco che possiamo dire sul numero cromatico di un grafo arbitrario.
Se il grafo ha n vertici, il suo numero cromatico non può superare n.
Se comunque conosciamo il grado di ogni vertice possiamo fare dei progressi.

Colorazione di Vertici

Teorema 1

Teorema:
Se G è un grafo semplice con vertice di grado massimo Δ , allora G è (Δ+1)-colorabile.

Dimostrazione:
Procediamo per induzione sul numero di vertici di G.
Sia G un grafo semplice con n vertici.
Se cancelliamo un qualunque vertice v e i lati ad esso incidenti, il grafo che rimane è un grafo semplice con n-1 vertici e vertice di grado massimo al massimo Δ .
Per la nostra ipotesi induttiva questo grafo e (Δ +1)- colorabile .
Una (Δ +1)- colorazione per G è ottenuta colorando v con un colore diverso dai (al massimo Δ) vertici adiacenti a v.



Colorazione di Vertici

Teorema 2

Teorema (Brooks 1941) :
Se G è un grafo semplice connesso che non è un grafo completo, con vertice di grado massimo Δ (≥ 3), allora G è Δ- colorabile.

Osservazione4:
Entrambi questi teoremi sono utili se il grado di tutti vertici è più o meno lo stesso.
Ad esempio, per il teorema 1 ogni grafo cubico e 4- colorabile, mentre per il teorema di Brooks ogni grafo cubico , tranne *K4* , è 3- colorabile.
Dall'altra parte se il grafo ha alcuni vertici di grado molto grande , questi teoremi ci dicono poco.
Ad esempio se consideriamo il grafo *K1,s ,* il teorema di Brooks ci dice che tale grafo è s-colorabile, ma di fatto è 2-colorabile per ogni s.

Colorazione di Vertici

Teorema 3

La situazione precedente non si presenta se restringiamo la nostra attenzione ai grafi planari.

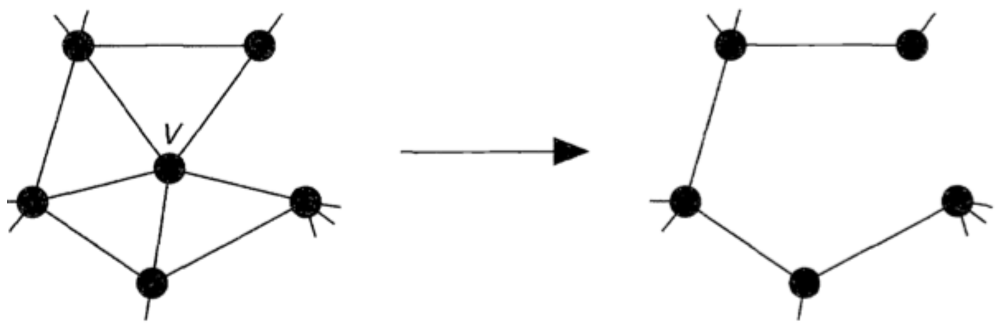
Teorema:
Ogni grafo planare semplice è 6-colorabile.

Dimostrazione:
Procediamo per induzione sul numero di vertici.
Il risultato è banale se consideriamo grafi planari semplici con al massimo 6 vertici.
Supponiamo quindi che G sia un grafo planare semplice con n vertici, e che tutti i grafi planari semplici con n-1 vertici siano 6 colorabili.
Dal teorema :
Ogni grafo planare contiene un vertice di grado al massimo 5.

Colorazione di Vertici

Teorema 3

Deduciamo che G contiene un vertice al massimo di grado 5.
Se cancelliamo v e i suoi lati incidenti, il grafo che rimane ha n-1 vertici ed è quindi 6 colorabile.
La 6-colorazione di G è ottenuta colorando v con un colore diverso dai (al massimo 5) vertici adiacenti a v.



Colorazione di Vertici

Teorema 4

Teorema:
Ogni grafo planare semplice è 5-colorabile.

Dimostrazione:
Procediamo per induzione sul numero di vertici.
Il risultato è banale per grafi planari semplici con meno di 6 vertici.
Supponiamo quindi che G sia un grafo planare semplice con n vertici, e che tutti i grafi planari semplici con n-1 vertici siano 5-colorabili.
Dal teorema:
Ogni grafo planare contiene un vertice di grado al massimo 5.
Deduciamo che G contiene un vertice di grado al massimo 5.
Come nella dimostrazione precedente, la cancellazione di v lascia un grafo con n-1 vertici , che è quindi 5-colorabile.

Colorazione di Vertici

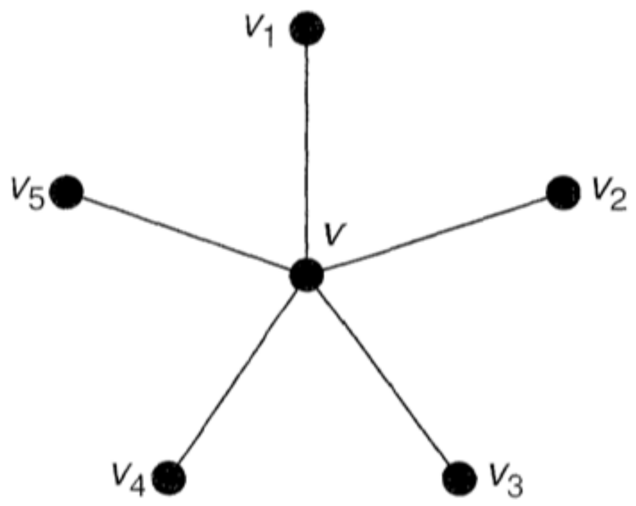
Teorema 4

Il nostro scopo è dunque colorare v con uno dei 5 colori, completando così la 5-colorazione di G.
Se deg(v) < 5, allora v può essere colorato con un qualsiasi colore non assunto dai (al massimo 4) vertici adiacenti a v.
Supponiamo quindi che deg(v) = 5, e che i vertici *v1 … v5* adiacenti a v siano disposti in senso orario intorno a v.
Se i vertici *v1 … v5* sono adiacenti, allora G contiene il grafo non planare *K5* come sottografo, che è impossibile.
Quindi almeno due dei vertici *vi* , supponiamo che siano *v1e v3,* non sono adiacenti.
Applichiamo ora l'operazione di contrazione dei lati *vv1 e vv3.*
Il grafo risultante è un grafo planare con meno di n vertici, ed è dunque 5-colorabile.

Colorazione di Vertici

Teorema 4

Reinseriamo ora i due lati, dando a v1 e a v3 il colore assunto originariamente da v.
La 5-colorazione di G è ottenuta colorando v con un colore diverso dai (al massimo 4) colori assegnati ai vertici vi.



Colorazione di Vertici

Teorema 5

Il precedente risultato può essere ulteriormente rafforzato , e questo porta alla uno dei più famosi teoremi della matematica: il teorema dei quattro colori.

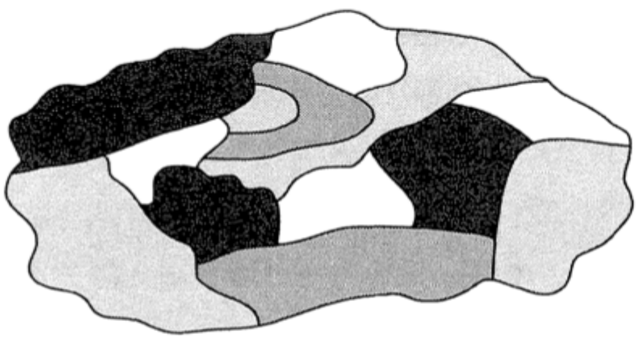
<u>Teorema: (Appel e Haken 1976)</u>
Ogni grafo planare semplice è 4-colorabile.

La dimostrazione del teorema è una complicata estensione del teorema dei 5-colori.
Si è dovuti ricorrere all’uso di calcolatori numerici.

Colorazione di Mappe

Introduzione

Il problema dei 4-colori sorse storicamente in relazione alla colorazione delle mappe.
Data una mappa che contiene numerosi paesi, ci chiediamo quanto colori sono necessari per colorarla in modo tale che due paesi confinanti non condividano lo stesso colore .
La figura mostra una mappa che è stata colorata solo con 4 colori.

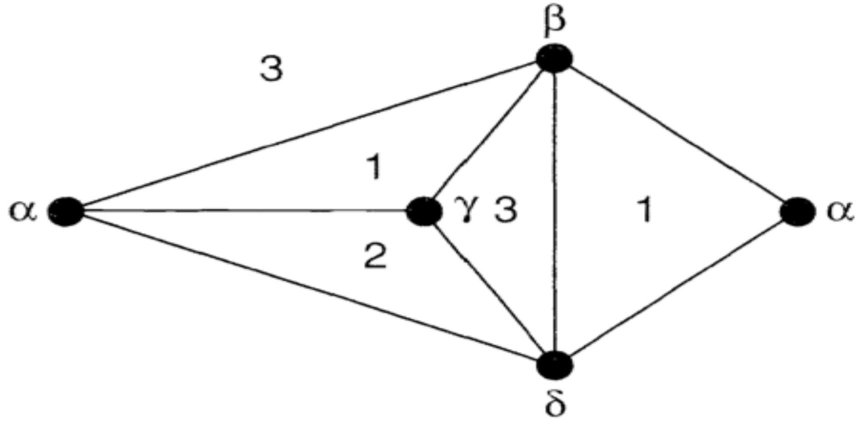


Colorazione di Mappe

Definizione

<u>Definizione1:</u>
Una mappa è **k-colorabile(f)** se le sue facce possono essere colorate con k colori in modo tale che due facce con un lato in comune non abbiano lo stesso colore.

<u>Esempio:</u>
La mappa in figura mostra un mappa 3-colorabile.



Colorazione di Mappe

Teorema 1

Vediamo sotto quali condizioni una mappa può essere colorata con due colori

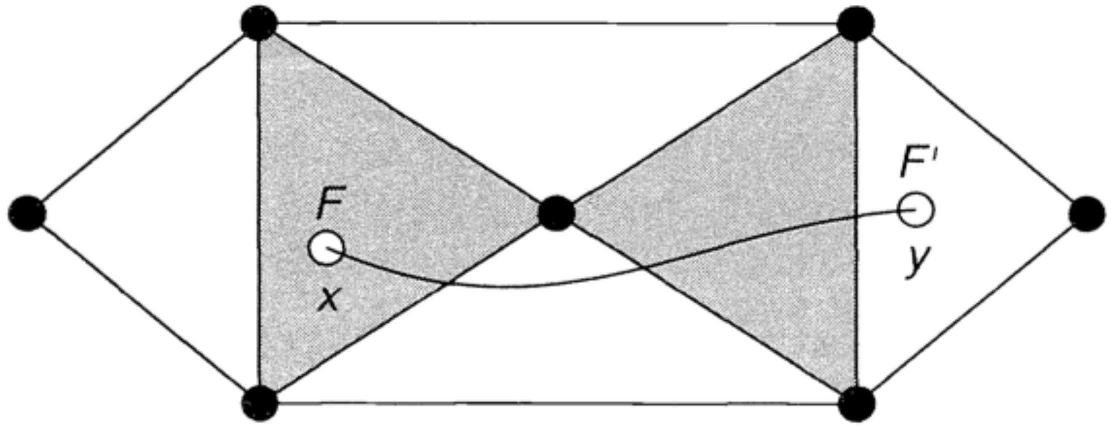
<u>Teorema:</u>
Una mappa G è 2-colorabile se e solo se G è un grafo euleriano.

<u>Dimostrazione:</u>
($\Longrightarrow$) Per ogni vertice v di G, le facce che circondano v devono essere in numero pari, così da poter essere colorate con due colori.
Segue che ogni vertice ha grado pari e
Dal <u>teorema</u>:
Un grafo G è euleriano $\Longleftrightarrow$ il grado di ogni vertice di G è pari.
Deduciamo che G è euleriano.

Colorazione di Mappe

Teorema1

($\Leftarrow$) Se G è euleriano possiamo colorare le sue facce con due colori come segue.
Scegliamo una qualsiasi faccia F e coloriamola di rosso.
Disegniamo una curva che va da un punto x in F in punto su qualsiasi altra faccia, senza passare attraverso vertici di G.
Se tale curva attraversa un numero pari li lati , allora coloriamo la faccia di rosso, altrimenti coloriamo la faccia di blu.



Colorazione di lati

Introduzione

Introduciamo con un esempio un'applicazione della colorazione dei lati di un grafo.
Supponiamo di dover organizzare un torneo di calcio con un numero n di squadre, sotto determinate condizioni: ogni squadra deve affrontare tutte le altre una sola volta, e in una giornata può affrontare una sola squadra.
Quale è il numero minimo di giornate per disputare tutte le partite?
Ogni squadra deve affrontare n-1 squadre, dunque potremmo pensare che n-1 sia il numero minimo di giornate, ma questo è vero se n è pari, ma non è vero se n è dispari.
Facciamo un controesempio.

Colorazione di lati

Introduzione

Supponiamo che le squadre siano 9, allora il numero di partite totali da giocare è C(9,2) =36.
Se fossero sufficienti 8 giornate, ci sarebbe almeno una giornata in cui verrebbero disputate 5 partite, ma questo implicherebbe che le squadre dovrebbero essere 10. Impossibile, poiché abbiamo supposto che le squadre sono 9.
Dunque se n è dispari sono necessarie almeno n giornate.
Questo problema può essere ridotto ad un problema di colorazione dei lati di un grafo completo *Kn,* che impieghi il minimo numero di colori: i vertici rappresentano le squadre, mentre i colori indicano le partite che devono essere giocate nella stessa giornata.
Una tale colorazione fornisce un calendario degli incontri.

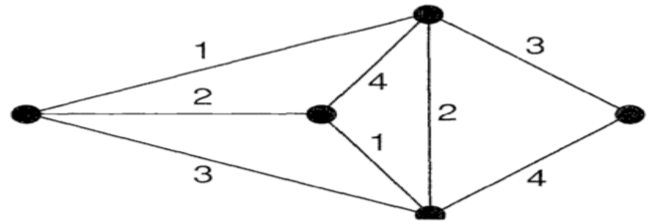
Colorazione di lati

Definizioni

Definizione1:
Un grafo G si dice **k-colorabile(e)**, o k-colorabile per lati , se i suoi lati possono essere colorati con k colori in modo tale che due lati adiacenti non abbiano lo stesso colore.

Definizione2:
Se G è k-colorabile(e) ma non (k-1)-colorabile, diciamo che **l'indice cromatico** di G è k e lo denotiamo con $\chi'(G) = k$.

Esempio:
La figura mostra un grafo G con indice cromatico $\chi'(G) = 4$.



Colorazione di lati

Teorema 1

Osservazione1:
Notiamo che se Δ è il vertice di grado massimo di G allora $\chi'(G) \geq \Delta$.

Il seguente teorema da condizioni restrittive sull'indice cromatico di un grafo semplice G.

Teorema(Vizig 1964):
Se G è un grafo semplice con vertice di grado massimo Δ, allora $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta+1$.

Osservazione2:
Non sappiamo quali grafi abbiano indice cromatico Δ *e quali* $\Delta + 1$.
Comunque il risultato per particolari tipi di grafi può essere trovato facilmente, ad esempio $\chi'(C_n) = 2$ *o* 3 , a seconda che n sia pari o dispari.

Colorazione di lati

Teorema2

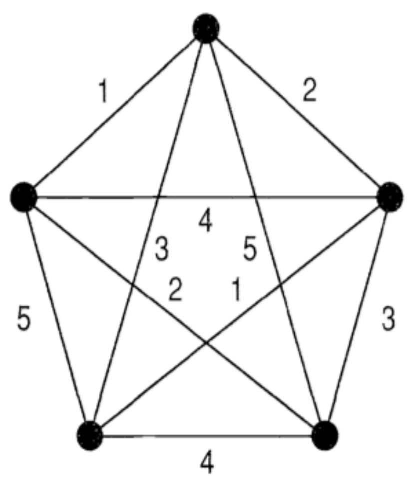
Teorema:
$X'(K_n)$ = n se n è dispari (n ≠ 1), e *$X'(K_n)$ = n-1 se n è pari.*

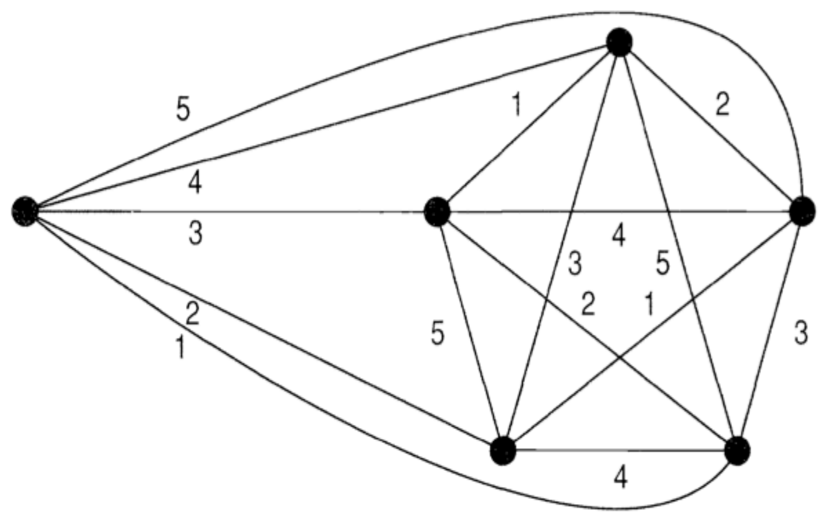
Dimostrazione:
Il risultato è banale se n = 2.
Supponiamo dunque che n ≥ 3.
Se n è dispari possiamo n- colorare i lati di Kn posizionando i vertici di Kn in modo da formare un n-agono regolare , colorando i lati di bordo ognuno con un colore diverso e colorando i lati rimanenti con il colore usato per colorare il lato parallelo ad esso.

Colorazione di lati

Teorema2

Se n è dispari otteniamo *Kn* aggiungendo al grafo completo Kn-1 un vertice. Se ora coloriamo i lati di Kn come abbiamo fatto nel punto precedente, c'è un colore mancante in ciascun vertice, e questi colori mancanti sono tutti diversi.
Completiamo la colorazione dei lati di Kn colorando i rimanenti lati con questi colori mancanti.





Colorazione di lati

Teorema3

<u>Teorema (Konig 1916):</u>
Se G è un grafo bipartito con vertice di grado massimo Δ, allora $\chi'(G) = \Delta$.

<u>Corollario:</u>
$\chi'(K_{r,s}) = \max(r,s)$.

Polinomio cromatico

Definizioni

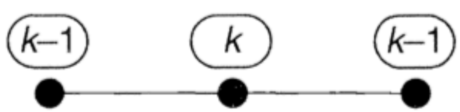
Concludiamo_tornando alla colorazione di vertici.
Associamo ad ogni grafo una funzione.
Senza perdita di generalità restringiamo la nostra attenzione ai grafi semplici.

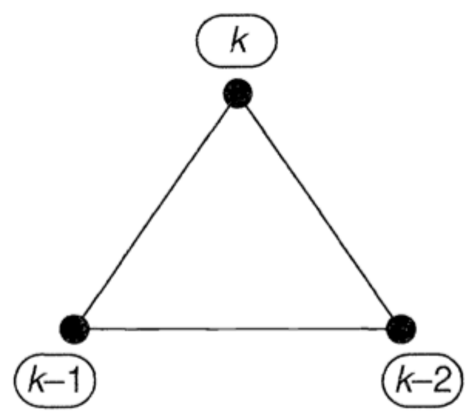
<u>Definizione1:</u>
Sia G un grafo semplice **e *P(G) (K)* il numero di modi di in cui possiamo colorare G con k colori** , in modo tale che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore.
P(G) è chiamata **funzione cromatica** di G.

Polinomio cromatico

Esempi

<u>Esempi:</u>
Se G è un albero allora la sua funzione cromatica P(G)(k) = *k(k-1)2,* poiché il vertice al centro può essere colorato in k modi, e i vertici laterali in (k-1) modi.
Questo risultato può essere esteso a tutti gli alberi con n vertici P(G)(k) = *k(k-1)n-1.*
Similmente se G è il grafo completo K3 P(G)(k) = *k(k-1)(k-2).*
questo risultato può essere esteso se G è un grafo completo Kn, P(G)(k) = *k(k-1)(k-2)…(k-n+1).*





Polinomio cromatico

Teorema 1

Il seguente teorema e corollario ci danno un **metodo** sistematico **per ottenere la funzione cromatica di un grafo semplice in termini della funzione cromatica di un grafo nullo.**

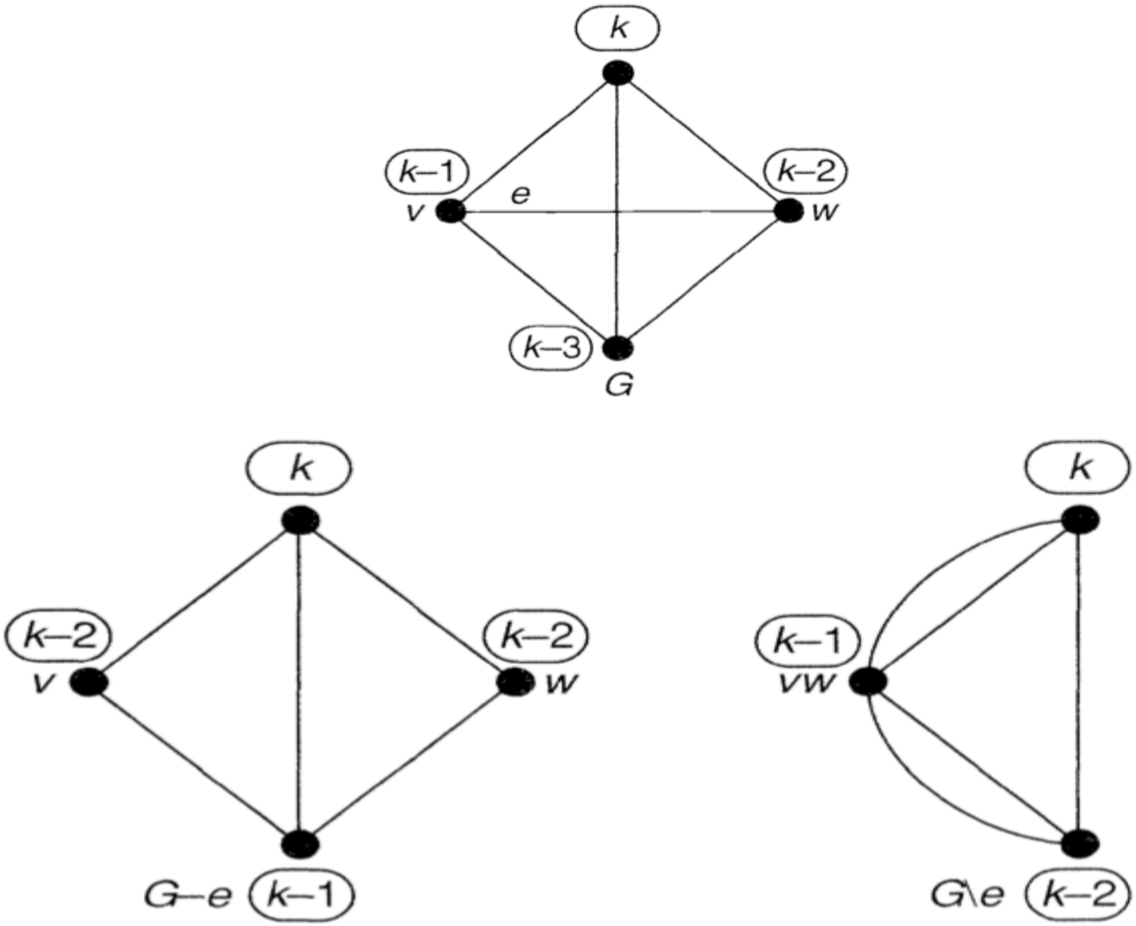
Teorema:

Sia G un grafo semplice, e siano G-e e G\e i grafi ottenuti cancellando e contraendo rispettivamente il lato e.

Allora $P(G)(k) = P(G-e)(k)-P(G\backslash e)(k)$.

Polinomio cromatico

Esempio



Polinomio cromatico

Esempio

Consideriamo i grafi mostrati nella figura precedente. Il teorema afferma che :

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)].$$

Polinomio cromatico

Teorema1

Dimostrazione:
Sia e=vw.
Il numero di k-colorazioni di G-e in cui v e w hanno colori **diversi** non cambia se disegniamo il lato e che unisce v e w, ed è quindi uguale a P(G)(K).
Similmente il numero di k-colorazioni di G-e in cui v e w hanno lo **stesso** colore non cambia se v e w vengono identificati, ed è quindi uguale a P(G\e)(k).
Il numero P(G-e)(k) di k-colorazioni di di G-e è dunque uguale a P(G)(k)+P(G\e)(k).

Polinomio cromatico

Corollario1

Corollario:
La funzione cromatica di un grafo semplice è un polinomio.

Dimostrazione:
Continuiamo con la procedura del teorema precedente, scegliendo un lato in G-e e in G\e, cancellando e contraendo rispettivamente.
Ripetiamo la procedura fino a che non rimangono lati, ovvero fino a che ogni grafo rimante è un grafo nullo.
Poiché **la funzione cromatica di un grafo nullo è un polinomio** (= *K^r dove r è* il numero di vertici), segue ripetendo l'applicazione del teorema precedente che la funzione cromatica di un grafo G è somma di polinomi, e dunque è un polinomio.

Polinomio cromatico

Definizioni

Osseravazione1:
Per calcolare il polinomio cromatico di un grafo non abbiamo bisogno di ridurci a un grafo nullo, ma è sufficiente ridurci a un grafo di cui conosciamo la funzione cromatica.

Dal corollario precedente segue la :

Definizione:
Chiamiamo **P(G)(k) polinomio cromatico di G**.