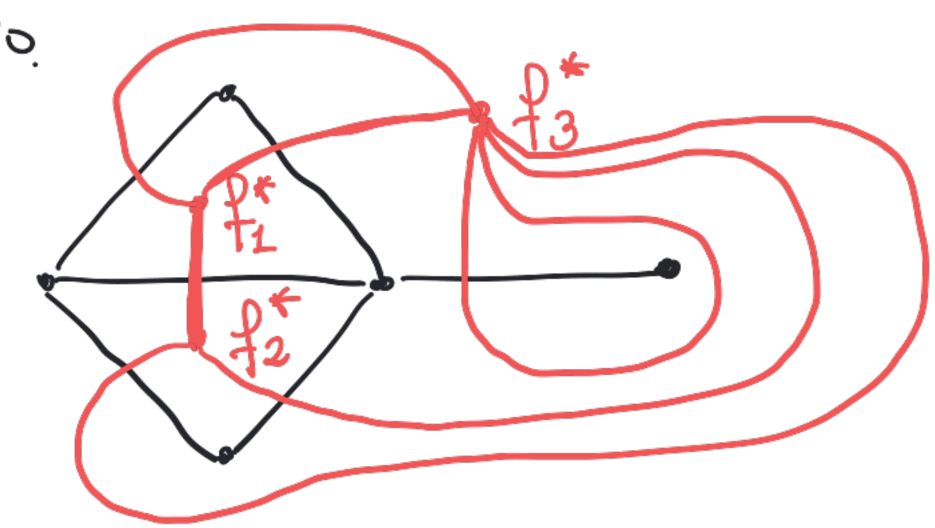
Dualità per grafi planari

Dato un grafo planare G, e una sua rappresentazione nel piano, definiamo un grafo (geometricamente) duale di G, G^*, nel modo seguente:

- ad ogni faccia f di G associamo un vertice f^* di G^*;
- Se $e \in E(G)$ è un lato che separa le facce f e g, associamo a e un lato e^* tra f^* e g^*.

↳ In particolare, se e è un ponte di G, e^* è un cappio di G^*, e se e è un cappio di G, e^* è un ponte di G^*.

Esempio

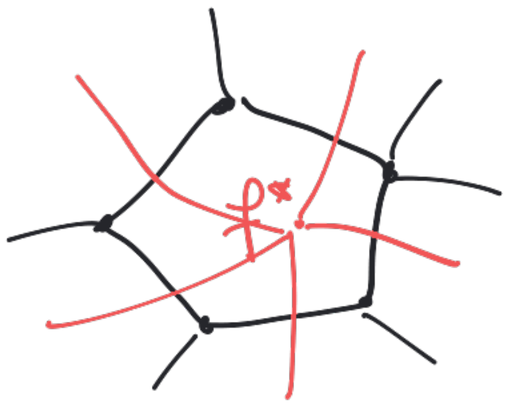


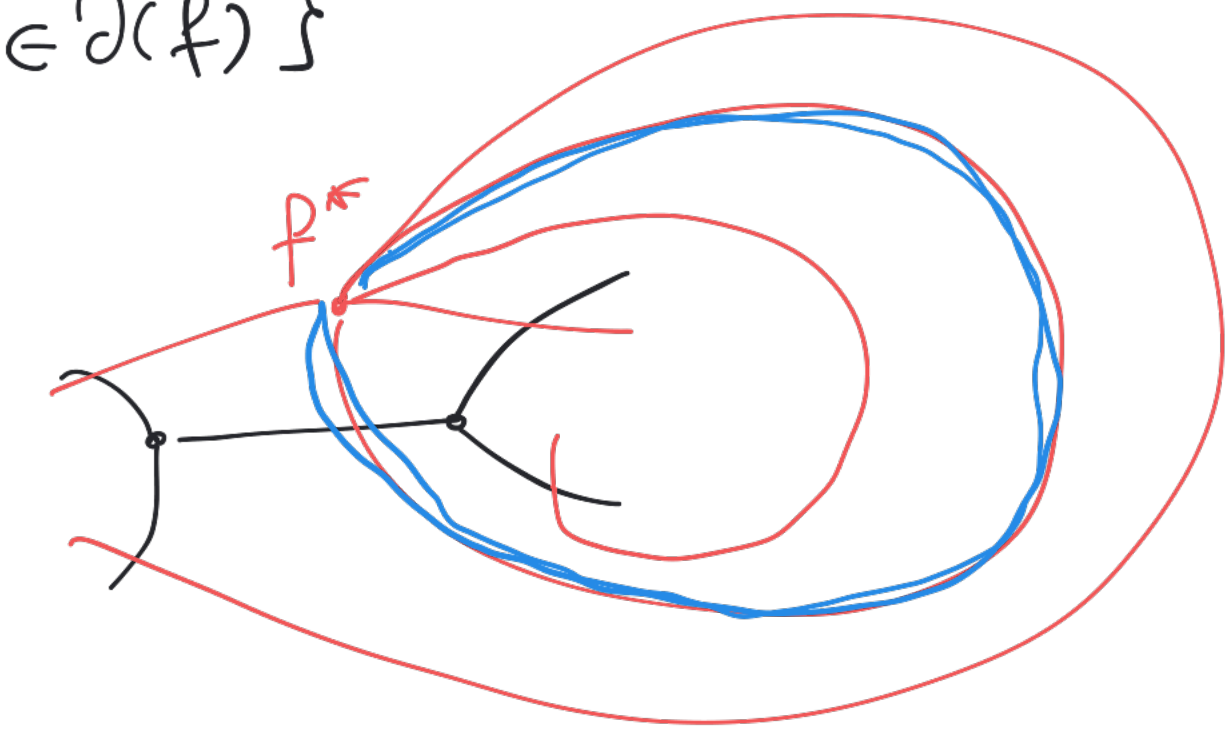
Oss: Il duale G^* di un grafo planare e' planare.

Oss Se G non ha ponti, G^* non ha cappi.

In questo caso, data una faccia f^* di G^*,

$$\partial(f^*) = \{ e^* : e \in \partial(f) \}$$



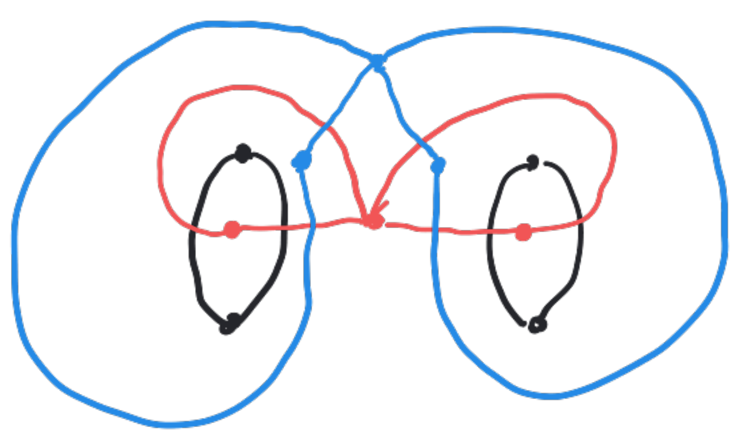


Esercizio Un ciclo in G^* contiene almeno un vertice di G.

Prop. 1) Il duale di un grafo planare è connesso.
2) Inoltre, se G è connesso, $G^{**} \cong G$.

__dim__
1) Sia G^* il duale di un grafo planare G. Dati due vertici di G^*, esiste un cammino tra loro nel piano che evita tutti i vertici di G. La sequenza di facce e lati attraversati da questo cammino determina una camminata in G^* tra i due vertici presi.

Prima di mostrare 2), consideriamo l'esempio seguente:
(per illustrare che l'ipotesi di connettività è necessaria)



G

2) Per l'esercizio, ogni faccia di G^* contiene al suo interno almeno un vertice di G.

Se G è connesso, una faccia di G^* non può contenere più di un vertice di G.

Infatti, usando la formula di Eulero,

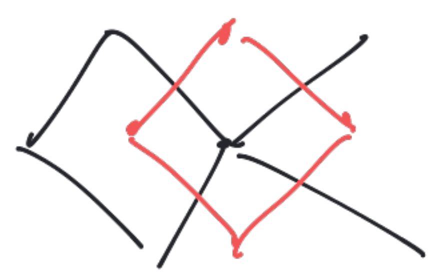
$$v(G) - e(G) + f(G) = 2$$

e

$$v(G^*) - e(G^*) + f(G^*) = 2$$

$$\Longrightarrow v(G) = f(G^*)$$

Quindi è immediato che in questo caso la costruzione si può invertire, e quindi che $G^{**} \cong G$. ■



In generale, abbiamo $v(G^*) = f(G)$

$e(G^*) = e(G)$

$d_{G^*}(f^*) = d_G(f) = \# \partial_G(f)$, $\forall f \in F(G)$.

e $f(G^*) = v(G)$ se G connesso

<u>Teorema</u> Sia G un grafo planare, allora

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2m \;(= 2e(G))$$

<u>dim</u> Sia G^* il duale di G. Allora

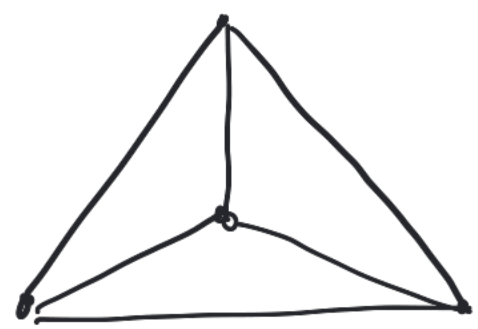
$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) \underset{\uparrow}{=} 2e(G^*) = 2e(G) = 2m$$

Handshaking Lemma

∎

Def Un grafo planare semplice e connesso in cui $d(f) = 3$, $\forall f \in F(G)$ è detto una triangolazione (planare).

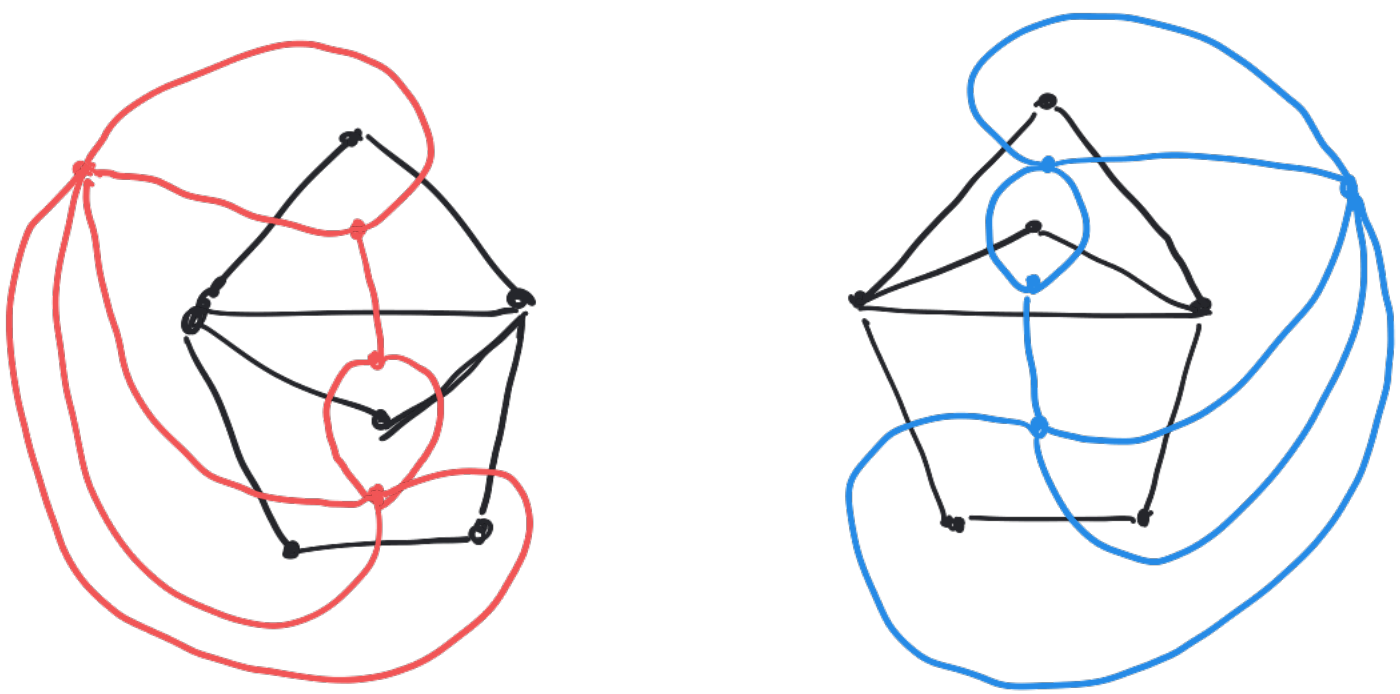
Esempio



Prop. Un grafo planare semplice connesso è una triangolazione sse il suo duale è un grafo cubico.

dim $\forall f \in F(G)$, $d_G(f) = d_{G^*}(f^*)$. $\square$

Oss. Non è vero che grafi planari isomorfi abbiano duali isomorfi $\rightarrow$ la dualità dipende dalla specifica rappresentazione planare che consideriamo.



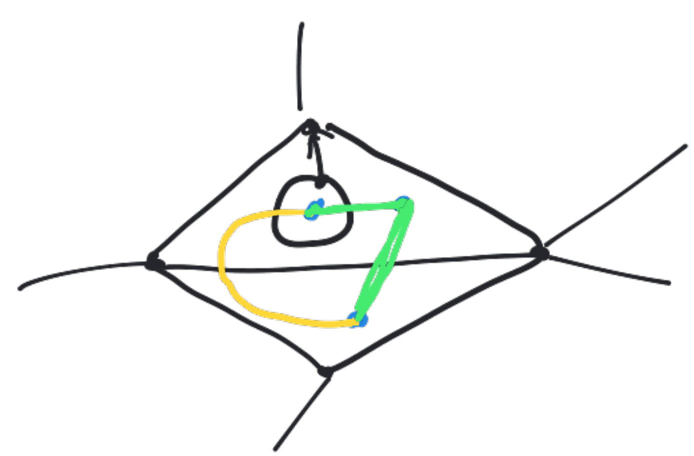
Teorema 10.28 Se G è semplice e 3-connesso, l'immersione planare è unica, quindi anche il duale planare è unico.

Dualità tra spazi dei tagli e dei cicli

Abbiamo visto (esercizio 7 del foglio 1) che $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ sono complementi ortogonali in $(\mathcal{E}(G), \mathbb{F}_2)$.
Vedremo adesso come interpretare l'ortogonalità nel caso di grafi planari.

Prop Sia G un grafo planare, G^* un duale planare di G, C un ciclo di G e X^* l'insieme dei vertici di G^* che giacciono in $\mathrm{int}(C)$. Allora $G^*[X^*]$ e $G^*[V(G^*) \setminus X^*]$ sono connessi.

dim



• Notazione: dato un insieme $S \subset E(G)$, denotiamo con

$$S^* = \{e^* : e \in S\} \subset E(G^*).$$

Teorema Sia G un grafo connesso planare e sia G^* un duale planare di G.

a) Se C è un ciclo di G, allora C^* è un taglio minimale (o bond) di G^*.

b) Se B è un taglio minimale di G, allora B^* è un ciclo di G^*.

dim a) Sia C un ciclo di G e sia X^* l'insieme dei vertici di G^* in $\mathrm{int}(C)$. $G[X^*]$ è un taglio di G^* e, per la prop. precedente

$$\begin{cases} G^*[X^*] \\ G^*[V(G^*) \setminus X^*] \end{cases}$$

sono connessi, quindi X^* è un taglio minimale di G^*.

b) Esercizio. ∎

Conseguentemente un insieme di lati di G forma un taglio di G sse il corrispondente insieme di lati forma un elemento in $\mathcal{C}(G)$.

Infatti, abbiamo

<u>Corollario</u> Sia G un grafo planare. Allora $\mathcal{C}(G) \cong \mathcal{B}(G^*)$.

<u>Ric</u> (Es. 7, Foglio 2) Un grafo G è detto duale algebrico di H se esiste una biezione $\phi : E(G) \to E(H)$ t.c. $C \in E(G)$ è un ciclo di G sse $\phi(C)$ è un taglio di H.

<u>oss</u> G planare $\Rightarrow$ G^* è un duale algebrico di G.

<u>Teorema</u> (Whitney) G è planare sse ammette un duale algebrico.

$\to$ dim si può fare come cons. del T. Kuratowski (vedere Wilson, "abstract dual").