Dualità per matroidi grafici

Ric che sono equivalenti, per un grafo G:

i) X e' un circuito di $M^*(G)$,

ii) X e' un cocircuito di $M(G)$;

iii) X e' un taglio minimale (o un bond) di G.

$\rightsquigarrow$ $M^*(G) = (M(G))^*$ è la matroide t.c.

- $E(M^*(G)) = E(G)$
- $\mathcal{C}(M^*(G)) = \mathcal{C}^*(M(G)) = \{\text{tagli minimali di } G\}$.

Q. Quand'e' che la matroide duale di $M(G)$,

$(M(G))^* = M^*(G)$ e' grafica?

Teorema. Se G è planare, $M^*(G) \cong M(G^*)$ è grafica.

dim Sia G un grafo planare e G^* il suo duale (geometrico)

Allora $M(G^*)$ è una matroide t.c.

$M(G^*) = (E(G^*), \mathcal{B}(G^*))$ con

- $E(G^*) \longleftrightarrow E(G)$
- $\mathcal{I}(M(G^*)) = \{$ sottoinsiemi di lati di G^* che non contengono cicli $\}$

$\Updownarrow$

$\mathcal{I}(M^*(G)) = \{$ sottoinsiemi di lati di G che non contengono tagli $\}$

$\parallel$

$\mathcal{I}(M(G)^*)$

Prop. Né $M^*(K_5)$ né $M^*(K_{3,3})$ sono grafiche.

dim. Mostriamo per assurdo che $M := M^*(K_5)$ non è grafica.

Supp. che $M \cong M(G)$, dove G è un grafo connesso.

Siccome K_5 ha 10 lati e rango 4, $M = (M(K_5))^*$ è t.c.

- $|E(M)| = 10$
- $r(M) = 6$

Quindi, se $M(G) \cong M$, G deve avere 7 vertici e 10 lati. Quindi il grado medio di un vertice di G è

$$\frac{2 \times 10}{7} = \frac{20}{7} < 3$$

$\Rightarrow \exists\, v \in V(G)$ con $d(v) \leq 2$.

Quindi $(M(G))^* = M^* = M(K_5)$ deve avere circuito di cardinalità 1 o 2

$\Rightarrow K_5$ ha un ciclo di lunghezza 1 o 2 ↯.

$\to K_{3,3}$ esercizio.

∎

Ricordiamo che: dati due grafi G e G', G è un duale algebrico o astratto di G' se esiste una biezione

$$\psi : E(G) \longrightarrow E(G')$$

che manda cicli di G in tagli di G'.

<u>OSS</u> G è duale astratto di G' sse

$$M(G) \cong M^*(G').$$

(5.22) <u>Teorema</u> Sia G un grafo. Allora sono equivalenti:

i) G è planare;

ii) $\Pi^*(G)$ è grafico;

iii) G ammette un duale astratto (o duale algebrico).

<u>dim</u>

i) $\Rightarrow$ ii) ok

ii) $\Rightarrow$ iii) Supp. che $\Pi^*(G) \cong \Pi(G')$, per un grafo G'.

$$\underset{\text{dualità}}{\Rightarrow} \quad \Pi(G) \cong \Pi^*(G')$$

$\Rightarrow$ G' è un duale astratto di G.

iii) $\Rightarrow$ i) Si usano il Lemma seguente e il T. di Kuratowski:

G è planare sse non ammette alcun sottografo omeomorfo a $K_{3,3}$ o K_5.

(suddivisione di)

Lemma: i) Se G_2 è un sottografo di G_1 e G_1 ha un duale astratto, anche G_2 ha un duale astratto.

ii) Se G_1 ha un astratto duale G_1' e G_1 è una suddivisione di G_2, anche G_2 ha un duale astratto.

dim i) Supp. che $G_2 = G_1 \setminus e$, $e \in E(G_1)$.

Sia G_1' duale astratto di G_1 e e' il lato di G_1' corrispondente a e. Allora G_1'/e' è un duale astratto di $\underbrace{G_1 \setminus e}_{=G_2}$ perché i cicli di G_1 che non contengono e corrispondono ai tagli di G_1' che non contengono e'.

ii) esercizio (Oxley, 5.2.4).

__dim__ di iii) $\Rightarrow$ i) nel teorema, i.e.,

supp. per assurdo che G e' non planare e che ammette un duale astratto.

Ma se G e' non planare, per il T. Kuratowski, G ha un sottografo G_1 ottenuto suddividendo $K_{3,3}$ o K_5.

Ma allora per il Lemma (i) anche G_1 ha un duale astratto per (ii) anche $K_{3,3}$ o K_5 ha un duale astratto.

Ma allora $M(K_{3,3})$ o $M(K_5)$ e' cografico,

e quindi $M^*(K_{3,3})$ o $M^*(K_5)$ e' grafico. $\not{\vee}$.

⇝ Il duale di una matroide rappresentabile su un campo F (risp. regolare) è rappresentabile su F (risp. regolare).

(vedere Oxley 2.2)

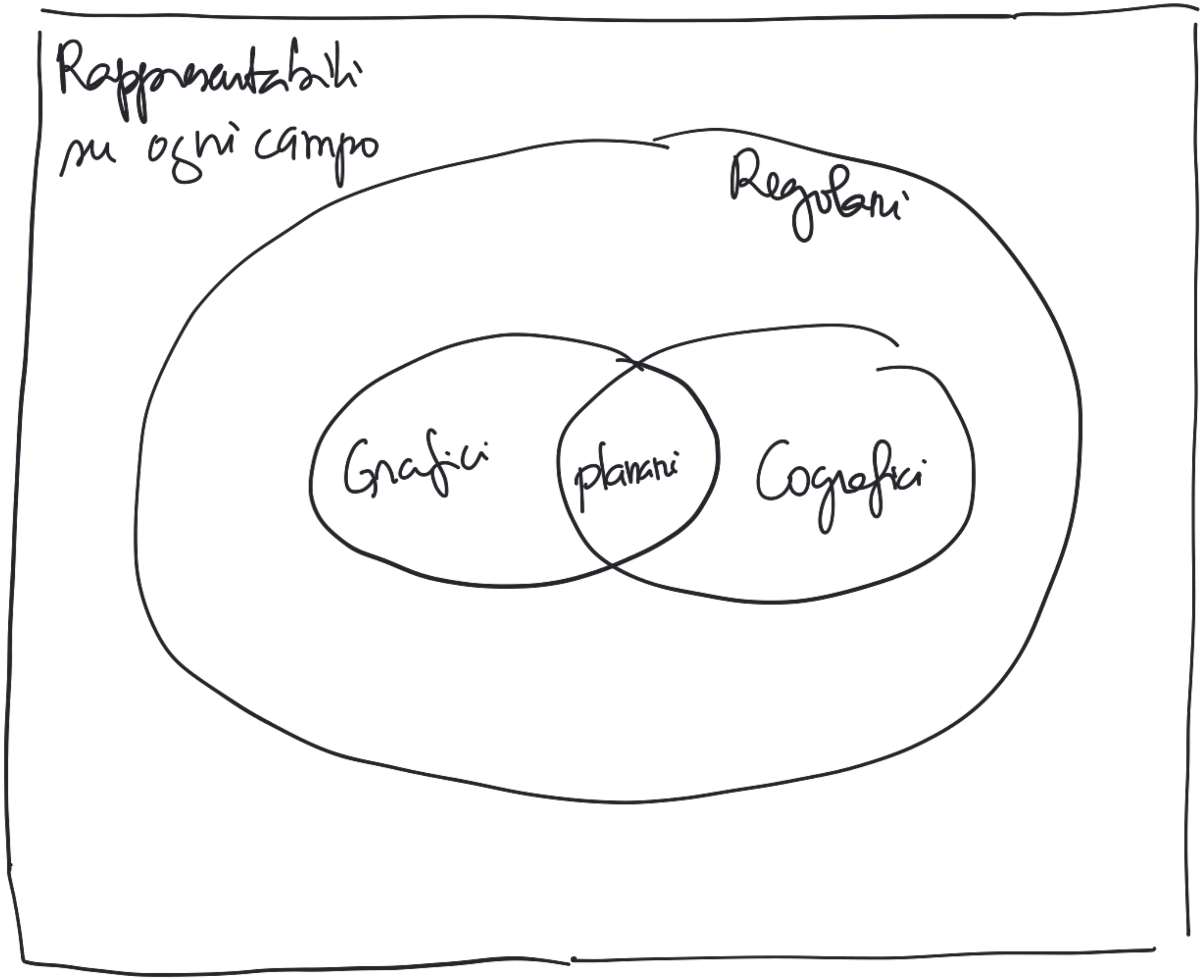
Idea: Se $M = M[A]$, rango R e $A \in M_{m \times n}(F)$

Allora $M \cong M[I_R \mid D]$, dove $D \in M_{R \times (n-R)}(F)$

e $M^* \cong M[-D^T \mid I_{n-R}]$.

⇝ Una matroide grafica è rappresentabile su ogni campo F / regolare (Alessandro Saviantoni)

Matroidi

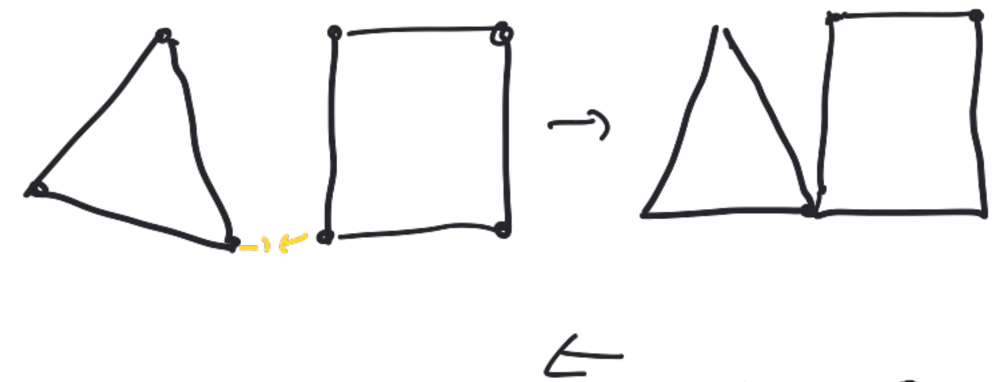

Rappresentabili
su ogni campo
Regolari
Grafici
planari
Cografici

Q. Fino a che punto conoscere $H(G)$ ci permette di conoscere G?

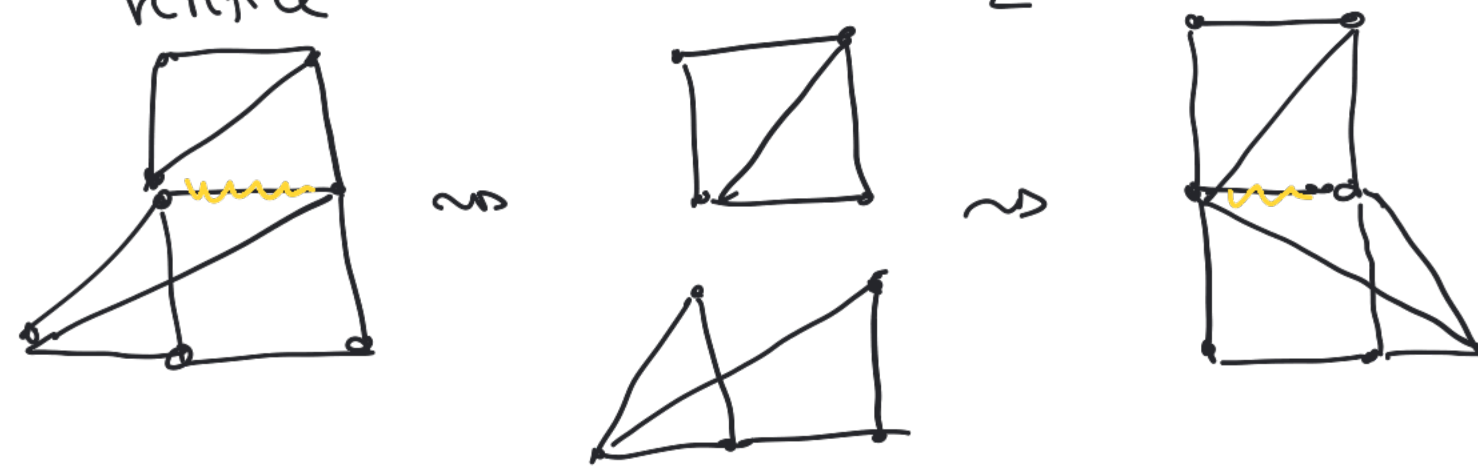
Def Due grafi G e H si dicono 2-isomorfi se uno si può ottenere dall'altro applicando una sequenza delle seguenti operazioni:

1) Identificazione di un vertice:

2) Separazione di un vertice



3) Twist di un lato:



Teorema di Whitney (1933)

$$M(G) \cong M(G') \iff G \cong_2 G'.$$

$\rightsquigarrow$ Oxley 5.3.1

$$(\ldots)$$

—— // ——