Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 1

Docente: Margarida Melo

Esercizio 1. *(i) Si dimostri che in un gruppo di almeno due persone, esistono almeno due che hanno lo stesso numero di amici nel gruppo.*

(ii) Descrivere un gruppo di 5 persone tale che ogni due persone tra loro hanno esattamente un amico in comune. È possibile trovare un gruppo di 4 persone con questa proprietà?

Esercizio 2. *Un "grafo cubo" Q_k è un grafo i cui vertici corrispondono a sequenze $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ di 0 e 1 e tale che i lati corrispondono a vertici le cui etichette differisconno in una sola entrata. Si dimostri che:*

(i) I grafi Q_k sono bipartiti;

(ii) I grafi Q_k hanno 2^k vertici, $k2^{k-1}$ lati e sono k-regolari.

Esercizio 3. *Si dimostri che:*

(i) ogni cammino è un grafo bipartito;

(ii) un ciclo è bipartito se e soltanto se ha lunghezza pari;

(iii) se $G = G[X, Y]$ è bipartito e regolare allora $|X| = |Y|$.

Esercizio 4. *Sia G un grafo semplice. Si dimostri che gli elementi diagonali di entrambe A^2 e MM^T sono i gradi dei vertici di G.*

Esercizio 5. *Dato un grafo G con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, la sequenza*

$$(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$$

si chiama la sequenza dei gradi di G. Sia $\underline{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una sequenza non crescente di interi non-negativi, i.e., $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$. Si dimostri che:

(i) Esiste un grafo con sequenza di gradi uguale a $\underline{d}$ se e soltanto se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ è pari;

(ii) Esiste un grafo privo di cappi con sequenza dei gradi uguale a $\underline{d}$ se e soltanto se $\sum_{i=1}^{n} d_i$ è pari e $d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$.

Esercizio 6. *Dato un grafo G, si consideri il suo complemento $\overline{G}$.*

(i) Esprimere la sequenza dei gradi di $\overline{G}$ in termine di quella di G.

(ii) Mostrare che se G è disconnesso, allora $\overline{G}$ è connesso. È vero il vice-versa?

Esercizio 7. *Si G un grafo. Dimostrare che sono equivalenti:*

(i) G *è connesso;*

(ii) *Per ogni partizione* $V = X \cup Y$ *dell'insieme* $V = V(G)$, *esiste un lato* $e \in E = E(G)$ *con una estremità in* X *e una estremità in* Y.

(iii) *Non è possibile scrivere* G *come unione disgiunta di grafi non nulli*

$$G = G_1 \cup G_2.$$

Esercizio 8. *Sia* G *un grafo semplice con* n *vertici e* m *lati. Si dimostri che:*

(i) *esistono almeno due vertici di* G *con gradi uguali;*

(ii) $m \leq \binom{n}{2}$ *e determinare quando vale l'uguale;*

(iii) *se* $m > \binom{n-1}{2}$ *allora* G *è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.*

(iv) *se* $\delta > \frac{n-2}{2}$ *allora* G *è connesso e dimostrare che il risultato è ottimale.*