Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Esercitazione 3

DOCENTE: MARGARIDA MELO

Esercizio 1. *Un grafo G si dice dispari se ogni vertice di G ha grado dispari. Mostrare che G è dispari se e solo se $|\partial X| \equiv |X| (\mod 2)$, per ogni sottoinsieme $X \subset V$.*

Esercizio 2. *Sia G un grafo con matrice di adiacenza $A = (a_{u,v})$. Mostrare che il numero di camminate da u a v di lunghezza k in G è l'entrata (u, v) della matrice A^k.*

Esercizio 3. *Si mostri che la matrice di incidenza di un grafo è totalmente unimodulare se e soltanto se il grafo è bipartito.*

Esercizio 4. *(i) Siano T_1, T_2 sottoalberi di un'albero T. Mostrare che $T_1 \cap T_2$ e $T_1 \cup T_2$ sono sottoalberi di T se e soltanto se $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.*

(ii) Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di tutti i sottoalberi di un'albero T. Dedurre, per induzione su $|\mathcal{T}|$, che se qualsiasi coppia di elementi di $\mathcal{T}$ ha un vertice in comune, allora esiste un vertice di T che appartiene a tutti gli elementi di $\mathcal{T}$.

Esercizio 5. *(i) Sia G un grafo senza cappi né tagli. Mostrare che $t(G) \geq |E(G)|$.*

(ii) Per quali grafi G vale l'uguaglianza?

Esercizio 6. *Sia G un grafo connesso e $S \subset E(G)$. Si mostri che sono equivalenti:*

(i) S è un co-albero di G;

(ii) S non contiene alcun taglio minimale di G, ed è massimale con rispetto a questa proprietà;

(iii) S interseca ogni ciclo di G, ed è minimale con rispetto a questa proprietà.

Esercizio 7. *Sia G un grafo connesso con $|V(G)| \geq 3$ e sia $e = uv$ un vertice di taglio di G. Mostrare che o u o v è un vertice di taglio di G.*

Esercizio 8. *Sia G un grafo connesso con almeno due vertici e sia $v \in V(G)$ un grafo su cui non incide alcun cappio di G. Mostrare che v è un vertice di taglio e soltanto se è un vertice separante di G.*

Esercizio 9. *Si dimostri che, per un grafo G, abbiamo che:*

(i) G è pari se e soltanto se ogni suo blocco è pari;

(ii) G *è bipartito se e soltanto se ogni suo blocco è bipartito.*

Esercizio 10. *(i) Sia* B *un blocco di un grafo* G *e sia* P *un cammino in* G *connettendo due vertici di* B*. Mostrare che allora* P *è contenuto in* B*.*

(ii) Dedurre che un'albero generante T *di un grafo connesso* G *è un'albero generante di* G *se e soltanto se* $T \cap B$ *è un'albero generante di* B*, per qualunque blocco* B *di* G*.*

Esercizio 11. *Un lato* e *di un grafo* 2*-connesso* G *si dice "contraibile" se* G/e *è ancora* 2*-connesso. Mostrare che se* G *è* 2*-connesso e se* $|V(G)| \geq 3$*, allora* G *contiene un lato contraibbile.*

Esercizio 12. *Un lato* e *di* G *si dice "cancellabile" se* $\kappa(G \backslash e) = \kappa(G)$*. Mostrare che ogni lato di un grafo* 2*-connesso con almeno* 4 *vertici è o cancellabile o contraibbile.*

Esercizio 13. *Sia* G *un grafo* 2*-connesso e supponiamo che* $\{x, y\} \subset V(G)$ *è un insieme separante tale che* $e = xy \in E(G)$*. Si dimostri che se* F *è una componente connessa di* $G \setminus \{x, y\}$*, allora* $H := G[V(F) \cup \{x, y\}]$ *è* 2*-connesso.*

Esercizio 14. *(i) Si dimostri che se* G *è un grafo* k*-connesso e se* $e \in E(G)$*, allora* G/e *è* $(k-1)$*-connesso.*

(ii) Per ogni $k \geq 4$*, trovare un grafo* k*-connesso diverso da* K_{k+1} *tale che* $\kappa(G/e) = \kappa(G)$*,* $\forall e \in E(G)$*.*

Esercizio 15. *(⋆) Descrivere un algoritmo per trovare, in tempo polinomiale, dato un grafo* 3*-connesso* G *con almeno* 5 *vertici, un lato* e *tale che* G/e *sia* 3*-connesso.*