Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Primo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare per email entro: **23/03/2020**

Esercizio 1. *Sia G un grafo con m lati e n vertici e sia $e \in V(G)$ un lato di G. Definiamo la contrazione di e come il grafo G/e, ottenuto da G eliminando il lato e e identificando i vertici adiacenti a e (vedere [BM] sec. 2.3). Si dimostri che:*

(i) *se G è pari, allora G/e è pari;*

(ii) $c(G/e) = c(G), \forall e \in E(G)$ *(ricordiamo che con $c(G)$ indichiamo il numero di componenti connesse di un grafo G);*

(iii) *Se G è aciclico e $e \in E(G)$,*

  (a) *G/e è aciclico;*

  (b) $m = n - c(G)$.

(iv) *Se G è connesso e semplice, $n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.*

Esercizio 2. *Un grafo semplice si dice auto-complementare se è isomorfo al suo grafo complementare $\overline{G}$.*

(i) *Si dimostri che se G è auto-complementare allora $|V(G)| = 4k$ o $4k + 1$, dove k è un intero.*

(ii) *Si dimostri che, per un grafo qualsiasi, $Aut(G) \cong Aut(\overline{G})$.*

Esercizio 3. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G. Per definizione, un autovalore di G è un autovalore di A e il polinomio caratteristico di G è il polinomio caratteristico di A. Si dimostri che:*

(i) *tutti gli autovalori di G sono reali e quelli razionali sono interi;*

(ii) *se G è k-regolare, allora k è un autovalore di G con autovettore $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$;*

(iii) *nessun autovalore di G ha valore assoluto più grande di Δ;*

(iv) *se G è connesso e Δ è un autovalore di G allora G è regolare;*

(v) *se G è connesso e $-\Delta$ è un autovalore di G, allora G è regolare e bipartito.*

Esercizio 4. *(i)* *Si dimostri che, se esistono due cicli distinti di un grafo G contenendo un certo lato e, allora G ha un ciclo che non contiene e.*

(ii) *Si dimostri un risultato analogo sostituendo "ciclo" con "taglio".*

(iii) *Si dimostri che, dati un ciclo C e un taglio C^* di un grafo G, allora C e C^* hanno un numero pari di lati in comune.*

Esercizio 5. *Si dimostri che un taglio in un grafo G si scrive come unione disgiunta di tagli minimali (bonds) di G.*

Esercizio 6. *Un insieme $E \subset E(G)$ di lati di G si dice indipendente se E non contiene alcun ciclo di G. Si dimostri che*

(i) *qualsiasi sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente;*

(ii) *Se I e J sono insiemi indipendenti e $|J| > |I|$, allora esiste un lato e che appartiene a J ma non a I e tale che $I \cup \{e\}$ è ancora indipendente.*

(iii) *Si dimostri che (i) e (ii) rimangono validi sostituendo la parola "ciclo" per "taglio".*

Esercizio 7. *Sia G un grafo e consideriamo gli spazi $\mathcal{C}(G)$ e $\mathcal{B}(G)$ dei cicli e dei tagli di G. Si dimostri che*

(i) *i cicli di G generano $\mathcal{C}(G)$;*

(ii) *i tagli minimali di G generano $\mathcal{B}(G)$.*

(iii) *$\mathcal{B}(G)$ è lo spazio delle righe definito della matrice di incidenza M definita su $\mathbb{F}_2$ e $\mathcal{C}(G)$ è il suo complemento ortogonale.*