Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Secondo foglio di esercizi

DOCENTE: MARGARIDA MELO

DA CONSEGNARE PER EMAIL ENTRO: **27/04/2020**

Esercizio 1 (Il problema del commesso viaggiatore)**.** *Un commesso viaggiatore desidera visitare un certo numero di cità per poi tornare al punto di partenza. Visto che i tempi di viaggio tra le diverse città sono diversi, si pone il problema di come pianificare il viaggio in modo da visitare tutte le città nel minor tempo possibile.*

(i) *Tradurre il problema del commesso viaggiatore in termini di grafi pesati (un grafo con pesi attribuiti ai lati) e cammini di Hamilton minimali (relativamente ai pesi).*

(ii) *Argomentare che questo problema si può ridurre al caso in cui $G = K^n$ è un grafo completo.*

(iii) *Dare un'esempio per mostrare che la procedura seguente, conosciuta come "Euristica greedy", non risolve per forza il problema del commesso viaggiatore.*

- *Selezionare un vertice $v \in V(G)$;*
- *Cominciando con il cammino banale $\{v\}$, costruire un cammino di Hamilton aggiungendo ogni volta un lato di peso minimale tra l'ultimo vertice del cammino già costruito e un vertice che non sia ancora presente nel cammino;*
- *Formare un ciclo di Hamilton scegliendo il lato tra i vertici estremi del cammino di Hamilton.*

Esercizio 2. *Dato un grafo diretto G e $v \in V(G)$, si denoti con* $\mathrm{indeg(v)}$ *il numero di archi della forma uv e con* $\mathrm{outdeg(v)}$ *il numero di archi della forma vw, con $u, w \in V(G)$. Si dimostri che*

(i) $\sum_{v\in V(G)} \mathrm{indeg(v)} = \sum_{\mathrm{v\in V(G)}} \mathrm{outdeg(v)}$ *(questo risultato è conosciuto come il Handshaking Dilemma).*

(ii) *G è Euleriano (i.e., esiste un ciclo diretto contenendo tutti gli archi di G) se e solo se G è connesso (come grafo non diretto) e* $\forall v \in V(G), \mathrm{indeg(v)} = \mathrm{outdeg(v)}$.

Esercizio 3. *Sia G un grafo connesso.*

(i) *Si dimostri che esiste una biezione tra gli alberi generanti di G che contengono e e gli alberi generanti di G/e.*

(ii) *Si dimostri che* $t(G) = t(G/e) + t(G - e)$, *dove* $t(G)$ *indica il numero di alberi generanti di* G.

Esercizio 4 (Tree exchange property)**.** *Sia* G *un grafo connesso,* T_1 *e* T_2 *due alberi generanti di* G *e sia* $e \in T_1 \setminus T_2$. *Si dimostri che:*

(i) *esiste* $f \in T_2 \setminus T_1$ *tale che* $T_1 \setminus \{e\} \cup \{f\}$ *è un'albero generante di* G*;*

(ii) *esiste* $f \in T_2 \setminus T_1$ *tale che* $T_2 \setminus \{f\} \cup \{e\}$ *è un'albero generante di* G*;*

Esercizio 5. *Sia* T *un'albero generante di un grafo connesso* G. *Si mostri che:*

(i) *i cicli fondamentali di* G *con rispetto a* T *formano una base del suo spazio dei cicli.*

(ii) *i tagli minimali fondamentali di* G *con rispetto a* T *formano una base del suo spazio dei tagli.*

(iii) *determinare le dimensioni di questi due spazi vettoriali.*

Esercizio 6. *Sia* G *un grafo connesso e sia* M *la sua matrice di incidenza.*

(i) *Mostrare che le colonne di* M *corrispondenti a un sottoinsieme* $S \subset E(G)$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{F}_2$ *se e soltanto se* $G[S]$ *è aciclico.*

(ii) *Dedurre che esiste una corrispondenza biunivoca tra le basi dello spazio delle colonne di* M *su* $\mathbb{F}_2$ *e gli alberi generanti di* G.

Esercizio 7. *Il duale algebrico di un grafo* G *è un grafo* H *per il quale esiste una biezione* $\theta : E(G) \to E(H)$ *mandando ogni ciclo di* G *in un taglio di* H *e ogni taglio di* G *in un ciclo di* H.

(i) *Si mostri che:*

  (a) *l'ottaedro e il cubo sono duali algebrici.*

  (b) $K_{3,3}$ *non ha alcun duale algebrico.*

(ii) *Sia* G *un grafo connesso e* H *un duale algebrico di* G, *con biezione* θ.

  (a) *Si mostri che* T *è un'albero generante di* G *se e soltanto se* $\theta(T)$ *è un co-albero di* H.

  (b) *Concludere che* $t(G) = t(H)$.

Esercizio 8. *Sia* G *un grafo e* $e \in E(G)$ *un lato di* G. *Mostrare che:*

(i) *Se* $G \setminus e$ *è non-separabile e* e *non è un cappio di* G, *allora* G *è non-separabile.*

(ii) *Se* G/e *è non-separabile e* e *non è né un cappio né un ponte di* G, *allora* G *è non-separabile.*