Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Terzo foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare per email entro: **22/05/2020**

Esercizio 1. *Sia G un grafo 2-connesso e sia $e \in E(G)$ tale che G/e non è 2-connesso. Si dimostri che G/e ha esattamente un vertice separante, precisamente quello che risulta della contrazione di e.*

Esercizio 2 (Connettività per lati)**.** *Siano $x, y \in V(G)$ vertici distinti. Definiamo la connettività locale per lati tra x e y, $p'(x, y)$, come il numero massimo di cammini in G tra x e y che non hanno lati in comune. Diciamo poi che un grafo non banale G è k-connesso per lati se $p'(u, v) \geq k$, $\forall u, v \in V(G), u \neq v$. La connettività per lati di un grafo G, che denotiamo con $\kappa'(G)$, è il più grande valore di k tale che G è k-connesso per lati (per convenzione un grafo banale ha connettività per lati 1). Si dimostri che*

(i) *Un grafo è 1-connesso per lati se e soltanto se è 1-connesso.*

(ii) *Valgono per qualsiasi grafo G, le disuguaglianze*

$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta,$$

dove δ è il grado minimo di un vertice di G. In particolare, un grafo k-regolare è, al massimo, k-connesso.

(iii) *Se G è 3-regolare, allora $\kappa = \kappa'$.*

Esercizio 3. *Sia G un grafo planare con c componenti connesse, n vertici, m lati e f facce. Mostrare che vale la seguente generalizzazione della formula di Eulero:*

$$n - m + f = c + 1.$$

Esercizio 4. *Sia G un grafo planare semplice con $n \geq 3$ vertici, m lati e f facce e supponiamo che nessuna faccia di G sia un triangolo. Mostrare che:*

(i) $m \leq 2n - 4$;

(ii) *G contiene un vertice di grado minore o uguale a 3.*

Esercizio 5. *(i)* *Per quali valori di n il grafo completo K^n è planare?*

(ii) *Per quali valori di n, m il grafo bipartito completo $K^{n,m}$ è planare?*

Esercizio 6. *Sia G un grafo planare connesso e G^* il suo duale (geometrico).*

(i) *Mostrare che se G è 3-connesso, allora G^* è semplice.*

(ii) *Mostrare che G è bipartito se e solo se G^* è pari.*

(iii) *Un taglio minimale di Hamilton di un grafo connesso G è un taglio minimale tale che tutte le componenti di $G \setminus B$ sono alberi. Sia G un grafo planare che contiene un ciclo di Hamilton C. Mostrare che C^* è un taglio minimale di Hamilton di G^*.*

Esercizio 7. *Sia G un grafo planare e G^* un suo duale (planare). Mostrare che un ciclo in G^* contiene almeno un vertice di G.*

Esercizio 8. *Sia G un grafo che ammette un duale algebrico G^*. Mostrare che*

(i) *Un sottografo di G ammette un duale algebrico.*

(ii) *Un grafo omeomorfo a G ammette un duale algebrico.*

(iii) *Il grafo completo K^5 non ammette un duale algebrico.*

Esercizio 9. *Sia T un'albero generante di un grafo planare connesso G. Mostrare che $(E \setminus T)^*$ è un albero generante di G^*.*

Esercizio 10. *Si dimostri che una matroide M si può definire attraverso un insieme $E \neq \emptyset$ e una collezione $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di M chiamati cicli o circuiti tali che*

(i) *$\emptyset$ non è un ciclo;*

(ii) *Un ciclo non contiene propriamente nessun altro ciclo;*

(iii) *Dati due cicli distinti C_1 e C_2 e un elemento $e \in C_1 \cap C_2$, esiste un ciclo C_3 in $C_1 \cup C_2$ che non contiene e.*