Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2019/2020

GE460 - Teoria dei grafi - Quarto foglio di esercizi

Docente: Margarida Melo

Da consegnare per email entro: **19/06/2020**

Esercizio 1. *Mostrare che, data una matroide M, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *M è uniforme;*

(ii) *M non ha circuiti di cardinalità minore di $r(M)+1$.*

(iii) *ogni circuito di M interseca ogni cocircuito.*

Esercizio 2. *Un sottoinsieme $A \subset E$ in un matroide M in E.*

(i) *Si dimostri che A è un flat se $\mathrm{rk}(A \cup x) > \mathrm{rk}(A), \forall x \in A^c$ e che un'iperpiano è un flat proprio massimale di M.*

(ii) *Si dimostri che l'insieme dei flat ordinati per inclusione forma un reticolo, i.e., un insieme parzialmente ordinato per inclusione in cui qualsiasi sottoinsieme ha un supremo e un infimo.*

(iii) *Si dimostri che se $C \subset E$ è un circuito di M allora, $\forall x \in C$, $\mathrm{rk}(C \setminus x) = |C| - 1 = \mathrm{rk}(C)$, quindi $C \setminus x$ non può essere un flat di M.*

(iv) *Si dimostri che se A è un iperpiano allora $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(M) - 1$ e che A è un iperpiano se e soltanto il suo complemento è un cocircuito di M.*

(v) *Si concluda che dati un circuito e un cocircuito di un matroide, la loro intersezione non può avere cardinalità 1.*

Esercizio 3. *Sia M una matroide in un'insieme E. Si dimostri che, per qualunque sosttoinsieme X de E,*

$$\mathrm{cl}(X) = X \cup \{x : M \text{ esiste un circuito } C \text{ di } M : x \in C \subset \{X \cup x\}\}.$$

Esercizio 4. *Sia M una matroide in E.*

(i) *Siano X e Y flats di M con $Y \subset X$ e $r(Y) = r(X) - 1$. Mostrare che esiste un'iperpiano H di M tale che $Y = H \cap X$.*

(ii) *Dato $X \subset E$, mostrare che X è un'iperpiano se e solo se $E \setminus X$ è minimale tra tutti i sottoinsiemi di E che intersecano tutte le basi di M.*

Esercizio 5. *Sia M una matroide e $w : E(M) \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva, che attribuisce un peso agli elementi di M. Mostrare che M ha un'unica base di peso massimale.*

Esercizio 6. *Sia M una matroide in E e si definisca una funzione $r_1(X) := |X| - r(M) + r(E - X)$.*

(i) Mostrare direttamente che r_1 soddisfa gli assiomi (R1), (R2) e (R3), e quindi che r_1 definisce una funzione rango in una matroide in E.

(ii) Mostrare direttamente che B è una base di M_1 se e solo se $E - B$ è una base di M.

Esercizio 7. *Sia G un grafo planare. Usare dualità per matroidi per mostrare che vale la formula di Euler, i.e., che*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$