S superficie compatta, connessa, T_2, localmente euclidea.

Def. Un'immersione $G \hookrightarrow S$ di un grafo G in una superficie S è una mappa σ che mappa i vertici di G in punti distinti di S e i suoi lati in ~~un~~ archi $\sigma(e) = \sigma(xy)$ in modo che $\sigma(x)$ è raggiungibile tramite un arco da $\sigma(y)$.

• Una faccia F di G in S è una componente di $S \setminus \sigma(G)$ e la frontiera o bordo di F è l'immagine di G tramite σ.

Prop: $\forall S \ \exists G$ grafo tale che le facce di G in S sono tutte dischi

Teorema (di Eulero generalizzato): $\forall S$ superficie $\exists \chi(S)$ t.c. ogniqualvolta un grafo G di n vertici e m lati è immerso in S t.c. ~~se~~ ogni faccia è un disco, si ha:

$$n - m + l = \chi(S)$$

$\varepsilon(S)$ si chiama genere

dove l è il numero di facce. Poniamo $\varepsilon(S) := 2 - \chi(S)$

Oss. Il teorema di eulero ci dice che $\chi(S)$ dipende solo da S e non da G, quindi per il calcolo di χ (e di ε) possiamo ridurci a considerare immersioni di particolari grafi di cui le facce sono tutte dischi, così da ricadere nelle ipotesi del teorema

Obiettivo 1) Vogliamo calcolare $\chi(S)$ per ogni superficie, ovvero come varia χ a seguito di operazioni di chirurgia topologica.

2) Usare il punto 1) per dimostrare un lemma di topologia utile per la dimostrazione del teorema di Kuratowsky

Prima alcune definizioni:

Def: Ogni cerchio C in una superficie S è cerchio medio di un piccolo cilindro o nastro di moebius su S. Nel primo caso C si dice two sided, nel secondo caso one-sided. Infatti un cerchio medio di un cilindro separa un cilindro in due componenti connesse mentre un nastro di moebius solo in una. Inoltre se $S \setminus C$ è connesso C si dice cerchio non separante, altrimenti separante.

Oss: nella def precedente è importante che C sia cerchio medio nel caso del nastro di moebius. Altri cerchi sul nastro di moebius potrebbero ~~anche~~ sconnetterlo, cosa che non vogliamo.

Chirurgia topologica: S superficie. Vediamo come varia $\varepsilon(S)$ a seguito di

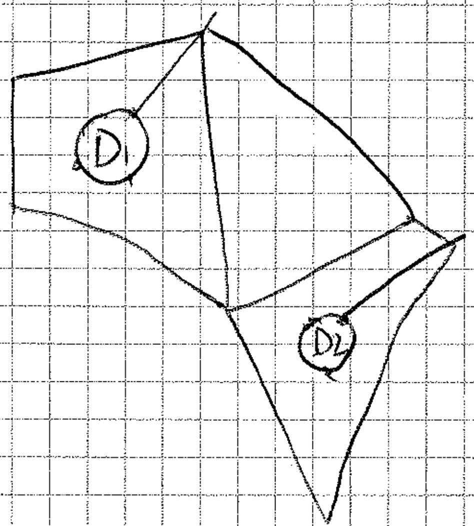
1) Aggiunta di maniglie su S
2) Aggiunta di cross-caps su S

} (maniglie e cross-caps danno una classificazione completa delle superfici in $\mathbb{R}^3$),

3) "Surgery": tagliare in un cerchio non separante in S e "tappare i buchi".

1) Siano D e D' dischi aperti su S che vorremmo rimuovere per attaccare una maniglia da D a D'. Sia G un'immersione di un grafo in S tale che ogni faccia è un disco. Possiamo scegliere D, D', σ in modo che D e D' siano contenuti ~~tutti~~ ognuno dentro una faccia di G. Siano f e f' tali facce. Aggiungiamo cicli C e C' sui bordi di D e D' e uniamo questi ultimi alle frontiere di f e f' rispettivamente. Sia G' il grafo ottenuto. Anche le facce di G' sono tutti dischi, quindi $\varepsilon(G') = \varepsilon(G)$, che significa che le operazioni effettuate sin qui ~~non~~ hanno lasciato invariato χ. Ora rimuoviamo D e D' e uniamo i loro bordi tramite una

maniglia che ha un lato di G che unisce i bordi di D e D'. ~~Ha~~ Questa operazione riduce il numero di facce di G di 1 avendo rimosso due dischi che erano facce ma avendo aggiunto ~~una~~ la maniglia, ~~la~~ aumenta il numero di lati di 1 avendo aggiunto il lato sulla maniglia, ~~e~~ ~~lascia~~ lascia invariato il numero di vertici. Quindi se S_1 è ~~il grafo ottenuto~~ la superficie ottenuta a partire da S aggiungendo una maniglia $\varepsilon(S_1) = \varepsilon(S) + 2$.



2) Ricordiamo, un crosscap si ottiene a partire da un cerchio identificando i punti diametralmente opposti. Come sopra scegliamo σ ~~e~~ D e G in modo tale che D è contenuto internamente in una faccia di G e tutte le facce di G sono dischi. Questa operazione riduce le facce di G di 1 perché perdiamo D e $n-m$ ~~sono~~ è invariato. Quindi se S_2 è ~~il grafo~~ la superficie ottenuta da S aggiungendo un crosscap $\varepsilon(S_2) = \varepsilon(S) + 1$.

3) Sia $S \neq S^2 \Rightarrow S$ ha un cerchio C non separante. Per C abbiamo 2 possibilità ~~pos~~. ~~Se N è la striscia~~ O C è cerchio medio di un cilindro oppure di un nastro di Moebius. Sia questo N. ~~Se N è un cilindro~~ Sostituiamo i punti di C con coppie di punti e siano $X' = \{x' | x \in C\}$

e $X'' = \{x'' \mid x \in C\}$. Se N è un cilindro $\Rightarrow N \setminus C$ ha 2 componenti N' e N'' e definiamo la topologia del nuovo spazio in modo che X' e X'' diventano bordi di N' e N'' e $N' \cup X'$ e $N'' \cup X''$ sono cilindri disgiunti in S' dove S' è lo spazio ~~superficie~~ ottenuto tagliando in C. Se N è un nastro di moebius definiamo la topologia del nuovo spazio in modo che X' e X'' sono archi disgiunti in S' e $(N \setminus C) \cup X' \cup X''$ è un ~~cerchio che è bordo~~ cilindro in S' con $X' \cup X''$ come bordo. Ora tappiamo i buchi per ottenere una superficie. Per ognuno dei cerchi di bordo prendiamo un disco su S' disgiunto da essi e ne identifichiamo i bordi. Ora immergiamo un grafo in S in cui ogni faccia è un disco e C è immagine di un ciclo (questo si può fare sempre, ma non è semplice da dimostrare). Comunque duplicando C restano invariato ~~numero di lati e di~~ $n-m$ perché in un ciclo $n-m=0$. Varia solo l, che aumenta di 2 se N è un cilindro e di 1 se N è un nastro di moebius.

Riassumendo abbiamo dimostrato il seguente

Lemma: Sia S una superficie e $\varphi(S) = S'$ la superficie ottenuta applicando una delle operazioni di chirurgia topologica, allora:

1) Se φ consiste nell'aggiunta di una maniglia allora $\varepsilon(S') = \varepsilon(S) + 2$

2) Se φ consiste nell'aggiunta di un cross-cap allora $\varepsilon(S') = \varepsilon(S) + 1$

3) Se φ consiste nel taglio di un cerchio non separante e nella "tappatura" di buchi $\Rightarrow \varepsilon(S') = \begin{cases} \varepsilon(S') = \varepsilon(S) - 2 & \text{se } C \text{ two-sided} \\ \varepsilon(S') = \varepsilon(S) - 1 & \text{se } C \text{ one-sided} \end{cases}$

Lemma: Sia C un cerchio separante in una superficie S. Siano S' e S'' le 2 superfici ottenute da S tagliando lungo C e tappando i buchi. Allora

$$\varepsilon(S) = \varepsilon(S') + \varepsilon(S'')$$

In particolare se C non è bordo di un disco S ha genere maggiore sia di S' che di S''

Dim:

Sia G un grafo immerso in S tale che ogni faccia è un disco. Posso scegliere G in modo che C è immagine di un ciclo di G. Siano $G' \hookrightarrow S'$ e $G'' \hookrightarrow S''$ i grafi ottenuti a seguito delle operazioni di chirurgia

$\Rightarrow$ G' e G'' contengono entrambi una copia di C, supponiamo che abbia K vertici e lati.

$$\Rightarrow \varepsilon(S') + \varepsilon(S'') = (2 - n' - m' - l') + (2 - n'' + m'' - l'')$$
$$= 4 - (n+K) + (m+K) - (l+2) = 2 - n + m - l = \varepsilon(S)$$

Per il secondo aspetto del teorema P.A. supponiamo $\varepsilon(S') = 0$
$\Rightarrow$ S' è una sfera $\Rightarrow$ $S' \cap S$ è un disco di cui C è il bordo $\ast$.

Lemma: S superficie, $\mathcal{C}$ set finito di cerchi disgiunti su S tali che nessuno di questi circonda un disco in S e $S \setminus \bigcup \mathcal{C}$ ha una componente D_0 la cui chiusura in S incontra tutti i cerchi di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon(S) \geq |\mathcal{C}|$.

Dim

Suddividiamo $\mathcal{C}$ nell'unione disgiunta di 3 insiemi

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2^1 + \mathcal{C}_2^2$$

cerchi one sided — cerchi two sided non separanti — cerchi two sided separanti

Tagliamo
1) lungo tutti i ~~cicl~~ cerchi in $\mathcal{C}_1$
2) lungo $|\mathcal{C}_2^2|$ cerchi non in $\mathcal{C}_1$
3) lungo almeno la metà dei cicli in $\mathcal{C}_2$

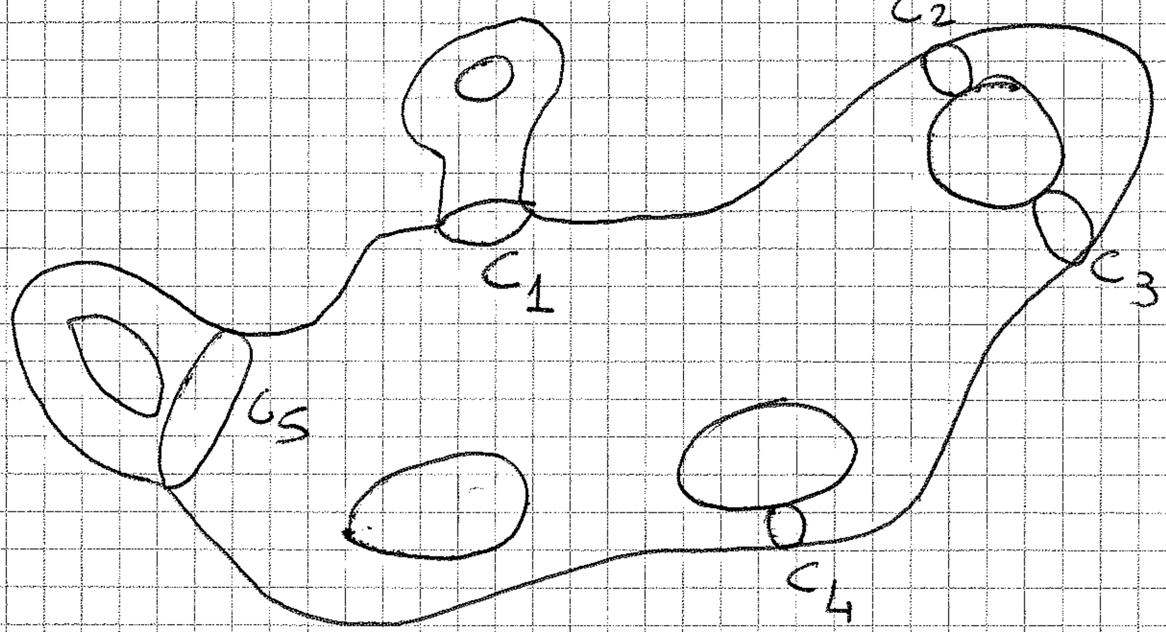
A seguito di ogni taglio otteniamo una sequenza di superfici $S_1, \_\_\_\_, S_n$ (dopo aver tappato i buchi). Vorremmo dedurre che ad ogni taglio C_i è non separante in S_i così da poter applicare il punto 3) del lemma precedente ed ottenere: (*)

$$\varepsilon(S_{i+1}) \leq \varepsilon(S_i) - 1 \qquad \forall i$$

$$\varepsilon(S_{i+1}) \leq \varepsilon(S_i) - 2 \qquad \text{se } C_i \in \mathcal{C}_2^1.$$

$$\Rightarrow \varepsilon(S) \geq \varepsilon(S_n) + |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2^2| + \frac{2}{2}|\mathcal{C}_2^1| \geq |\mathcal{C}|$$

Resta da dimostrare (*)



• Tagliando lungo ~~[illegible]~~ i cerchi di $\mathcal{C}_1$ e tappando i buchi la (*) è ovviamente verificata.

• Consideriamo ora $C \in \mathcal{C}_2^2$ (c_5 nella figura)
Sia $D(C)$ la componente di $S \setminus C$ che non contiene D_0. ~~[illegible]~~ Tagliamo C e tappiamo i buchi. Siccome $C \in \mathcal{C}_2^2$ non ~~riempie~~ circonda un disco in $S \Rightarrow S'$ non è una sfera, in quanto in una sfera tutti i cerchi sono bordi di dischi, $\Rightarrow \exists\, C' \in S'$ cerchio non separante. Possiamo quindi porre $C_i = C'$ e tagliare in C_i.

• Restano da scegliere almeno metà dei cerchi di $\mathcal{C}_2^1$ su cui tagliare. Suddividiamo $\mathcal{C}_2^1$ in due altri sottoinsiemi, in uno inseriamo i cerchi di $\mathcal{C}$ che hanno D_0 come componente da entrambi i lati (c_4 in figura), nell'altro i cerchi che sono bordo sia di D_0 che di un'altra componente, (c_3 in figura). Prima di essere tagliati ~~questi~~ i primi cerchi sono non separanti in S_i perché appartengono alla stessa componente D_0 ~~[illegible]~~

~~caso 1 e se sono scelti i~~

~~se sono scelti~~ se v. Invece per i cerchi del secondo insieme basta selezionare tutti i cerchi tranne uno per ogni componente cosicché nessuno di questi è separante e sono in numero almeno $\frac{|C_2'|}{2}$.