Introduzione

In questo breve seminario verrà esposto come, con l'utilizzo di strumenti tipici dell'algebra lineare, è possibile arrivare a dei risultati sorprendenti nella teoria dei grafi, a partire dalla rappresentazione dei grafi stessi in strutture matriciali.

Prendendo una delle rappresentazioni in matrice di un grafo, la matrice di adiacenza, possiamo definire lo spettro di un grafo come lo spettro della suddetta matrice e dare un senso pratico ai suoi autovalori, utilizzandoli concretamente per arrivare a risultati impensati. Già osservando i coefficienti del polinomio caratteristico (c_i) possiamo dire qualcosa sulla struttura del grafo: $-c_2$ numero dei lati di un grafo, $-c_3$ il doppio del numero dei triangoli in G (prop. 2.3 - Biggs) oppure il numero delle camminate di lunghezza l dal vertice v_i al vertice v_j è rappresentato dall'elemento (i,j) della matrice di adiacenza alla l-esima potenza A^l (lemma 2.5 -Biggs) dimostrabile per induzione sulla lunghezza delle camminate. Come ulteriore esempio, la struttura del grafo stesso può essere palese dallo spettro: un grafo bipartito ha gli autovalori simmetrici rispetto allo zero o K_n con spettro:

$$Spet(K_n) = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente ci saranno utili anche per calcolare la cosa per cui siamo qui oggi, il numero degli alberi generanti di un grafo qualsiasi.

0.Definizioni e risultati preliminari

Definizione 0.1 (grafo)

Definiamo un grafo G la coppia $(V(G), E(G))$ con $V(G)$ abbreviato V l'insieme dei vertici e $E(G)$ abbreviato E l'insieme dei lati ovvero coppie non ordinate di elementi di V, con relative cardinalità $|V(G)|=n$ e $|E(G)|=m$.

Un Grafo è detto connesso se presa una coppia qualunque di vertici questa è raggiungibile da una sequenza di lati e vertici, detta cammino, un cammino chiuso è un ciclo.

Un grafo è detto semplice se: i) non ha cappi, lati che incidono su uno stesso vertice e ii) non ha più lati tra una stessa coppia di vertici. Per grado di un vertice indichiamo il numero dei lati incidenti al vertice stesso.

Un particolare tipo di grafo è l'albero: se G=(V,E) con |V|=n i) è connesso con |E|=n-1 o ii) non ha cicli e |E|=n-1 o iii) esiste un unico cammino tra due vertici. Un albero T è detto generante se sottografo di un grafo G=(V,E) con V(T)=V(G)

Definizione 0.2 (Matrice di adiacenza).

Dato un grafo G con n vertici, definiamo la matrice di adiacenza $A(G)=A=(a_{ij})$ come la matrice quadrata $n \times n$ con righe e colonne indicizzate dai vertici di G tale che:

$$\{a\}_{ij} = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; i=j \\ 1 \;\; se \;\; ij \in E(G) \end{cases}$$

Naturalmente nel caso di un Grafo G semplice altrimenti per i=j avremo il numero dei cappi e mentre in $\{a\}_{i,j}$ *è* il numero dei lati che connettono i vertici *i e j*

Definizione 0.3 (Matrice di incidenza).

La matrice di incidenza *B(G)* di un grafo G con n vertici ed m lati è una matrice *nxm* con vertici nelle righe e lati nelle colonne tale che:

$$\{B(G)\}_{uf} = \begin{cases} 1 & se\ u \in V(G)\ \ \grave{e}\ \ estremo\ del\ lato\ f \in E(G) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Assegnando un orientamento $\boldsymbol{\sigma}$ al grafo G stiamo stabilendo un senso di percorrenza dei lati, parleremo quindi di archi non più di lati, ovvero uv sarà un arco con coda in u e testa in v ed indichiamo con G^{σ} il relativo Grafo orientato.

Preso un grafo non orientato G, definite *B(G), A(G)* e Δ ovvero la matrice diagonale con i gradi dei vertici di G, avremo la seguente relazione:

$BB' = \Delta + A$

Definizione 0.4 (Matrice di incidenza per un grafo orientato).

Sia G un grafo a cui associamo un qualunque orientamento σ, lo indichiamo con G^{σ}. Definiamo la matrice di incidenza $D(G^{\sigma})$) *nxm* tale che:

$$\{D(G^{\sigma})\}_{ve} = \begin{cases} -1\ se\ l'arco\ e\ ha\ testa\ in\ v \\ +1\ se\ l'arco\ e\ ha\ coda\ in\ v \\ \quad 0 \quad Altrimenti \end{cases}$$

vertice v come coda di e allora alla posizione (v,e) di D(G) avremo +1 mentre se il vertice v è la testa di e alla posizione (*v,e*) di *D(G)* avremo -1

Ora alcune caratteristiche della matrice di incidenza *D:*

Teorema 0.1 Sia *G=(V(G),E(G))* un grafo con c componenti connesse *n* vertici ed *m* lati, σ un qualunque orientamento e D la sua matrice di incidenza, allora il *rang(D) = n-c.*

Dim. Immaginando D dal punto di vista dei vertici/righe in blocchi composti da elementi nella stessa componente connessa, i valori nelle colonne saranno 1,-1 e i restanti 0, ogni blocco ha spazio nullo di dimensione 1, quindi lo spazio nullo avrà rango c, numero delle componenti connesse.

Lemma 0.1

Sia σ un orientamento qualunque di un Grafo G e D(G^σ) la sua matrice di incidenza, allora:

$$D(G^\sigma)D(G^\sigma)^T = \Delta(G) - A(G)$$

Con Δ, A rispettivamente la matrice nxn diagonale con i gradi dei vertici e la matrice di adiacenza del grafo G sottostante, quindi questo risultato è indipendente dall'orientamento scelto per G; quindi D(G^σ) viene usato come strumento per arrivare a dei risultati indipendenti da esso stesso

Dim. Sia $\{DD^T\}_{i,j}$, vediamo D=[d_1,...,d_m] come vettore delle colonne, $d_i * d_j$, il prodotto interno, avremo che:

i) con i≠j, avremo valori diversi da zero se ij o ji è un arco ed opposti ovvero 1 e -1, quindi il prodotto sarà -1

ii) per i=j avremo il grado del vertice i=j rispetto al grafo G non orientato.

Definizione 0.5 (Matrice Laplaciana)

Sia D la matrice di incidenza di un grafo G rispetto un qualunque orientamento, mentre A (matrice di adiacenza) e Δ (matrice diagonale con valori i gradi dei vertici di G) del grafo non orientato, definiamo la matrice Laplaciana Q come:

$$Q = \Delta - A$$

Come per il risultato del Lemma 1 Q è indipendente dall'orientamento scelto per G

Lemma 0.2

Sia G un grafo con n vertici e c componenti connesse e Q la sua matrice Laplaciana, allora $rang(Q) = n - c$.

Dim. Sappiamo che $Q=DD'$ con D matrice di incidenza secondo un generico orientamento; preso un vettore $z \in \mathbb{R}^n : DD^{\{T\}} z = 0 \Rightarrow z^T DD^T z = 0$ ovvero la distanza al quadrato del vettore $D^T z$, avremo sicuramente che $D^T z$ è nullo, in questo contesto, lo spazio nullo di DD^T e D^T

sono uguali, quindi concludiamo che $rang(DD^T) = rang(Q) = rang(D) = n - c$

Sfruttando il risultato del Teorema 1 []

Alcune caratteristiche. La matrice Laplaciana Q è una matrice simmetrica con autovalori reali ed essendo Q semidefinita positiva i suoi autovalori sono tutti non negativi.

$$\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(Q) \leq \ldots \leqslant \lambda_n(Q)$$

Per ogni grafo $\lambda_1 = 0$ dato che $Q1 = (\Delta - A)1 = 0$ e come conseguenza del Lemma 2 con molteplicità pari al numero delle componenti connesse (dim. spazio nullo di Q).

OSSERVAZIONI

i) Se G è un grafo connesso il rango di Q è n-1 e lo spazio nullo di Q ha dimensione 1 generato dal vettore 1=[1,1,1,..,1]

ii) i cappi sono ininfluenti per il calcolo della matrice Laplaciana, un cappio su un vertice equivale ad un +2 nella diagonale di Δ ed un +2 nella diagonale di A quindi la struttura è immutata

1.Numero degli alberi generanti di un Grafo

Riprendiamo alcune definizioni ormai note:

Sia *G* un grafo (*V(G),E(G)*) non orientato con */V(G)/=n* e */E(G)/=m*, sia *e* un lato di *G*, *e=uv*∈ *E(G)*:

- definiamo il taglio di *e* in *G*, l'eliminazione del lato *e*, indichiamo con $G \setminus e$ il sottografo con $V(G \setminus e) = V(G)$ vertici e $E(G \setminus e) = E(G) \setminus e$ lati, quindi / $|V(G \setminus e)| = n \, e \, |E(G \setminus e)| = m - 1$
- definiamo la contrazione del lato *e=uv* in *G* come l'identificazione dei vertici *u* e *v* in un unico vertice, indichiamo con *G/e* il nuovo grafo, tutti i lati incidenti ad u e v saranno incidenti al nuovo vertice frutto della contrazione.

Introduciamo la seguente notazione, sia M una matrice simmetrica con righe e colonne indicizzate da un certo insieme V, sia S ⊆V, indichiamo con M[S] la matrice ottenuta da M cancellando le righe e le colonne riferite all'insieme S.

Teorema 1.1 (Numero alberi generanti) Sia G un grafo e Q la sua matrice Laplaciana. Se u è un arbitrario vertice di G, u∈V(G) allora il det(Q[u]) equivale al numero degli alberi generanti di G.

Osservazione. *Riprendendo la notazione introdotta sopra Q[u] corrisponde alla matrice Laplaciana (matrice quadrata) di G a cui abbiamo tolto la colonna u e la riga u, (dal punto di vista del grafo come se avessimo tolto il vertice u) quindi il determinante di Q[u] è un minore di Q, o meglio un minore complementare poichè abbiamo tolto una sola riga ed una solo colonna (tolto un solo vertice). Moltiplicando per* $(-1)^{i+j}$ *il minore abbiamo il complemento algebrico, nel nostro caso* $(-1)^{u+u}$ *quindi positivo. Se il grafo è commesso il rango di Q è n-1, questo ci garantisce l'esistenza di det(Q[u]), con G sconnesso det(Q[u])=0, infatti per G sconneso avremo zero alberi generanti*

Dim. Dimostriamo il teorema per induzione sul numero dei lati di G. Indichiamo con $\tau(G)$ il numero degli alberi generanti di di *G.*

Sia G un grafo con due vertici $V(G)=\{u_1,u_2\}$ ed un lato $E(G)=\{e\}$, questo avrà una matrice laplaciano con la segunte forma:

$$Q=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

quindi preso un qualunque vertice avremo $\forall u\in V(G)\Rightarrow det(Q[u_1])=1$ infatti abbiamo un unico albero generante in G.

Ricordiamo che un albero generante di G è un suo sottografo ed è un albero che contiene tutti i suoi vertici, quindi preso $e=uv\in E(G)$ possiamo distinguere l'insieme di tutti gli alberi generanti in due: quelli che contengono *e* e quelli che non lo contengono, quindi contiamo gli alberi partendo da questa distinzione.

Inoltre sappiamo che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli alberi che contengono *e* e gli alberi generanti di G/e (solo un oggetto che contiene *e* può essere contratto in *e*), indichiamo la sua cardinalità con $\tau(G/e)$. Ogni albero generante che non contiene e è un albero generante in $G\setminus e$, indichiamo la sua cardinalità con $\tau(G\setminus e)$, in fine avremo:

$$\tau(G)=\tau(G/e)+\tau(G\setminus e)$$

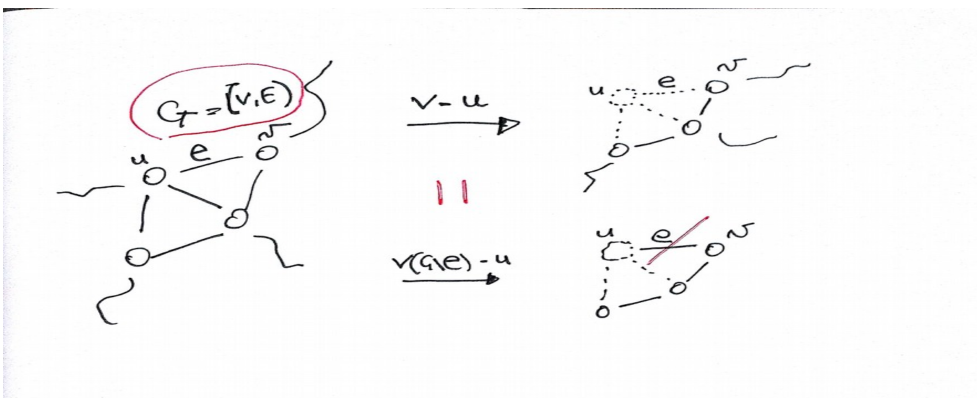
Sia *e=uv* un lato di G , introduciamo la matrice E diagonale *nxn* tutta nulla tranne in $E_{vv}=1$ (v altro estremo di *e*). Ora dobbiamo arrivare alla seguente forma:

$$Q[u] = Q(G\setminus e)[u] + E$$

Pensiamo *Q[u]* matrice Laplaciana con l'eliminazione del vertice u in G, la possiamo rappresentare come $Q[u]=\Delta(G)[u]-A(G)[u]$:

i) $\Delta(G)[u]$ la matrice diagonale dei gradi dei vertici di G eliminato il vertice u la possiamo rappresentare come $\Delta(G\setminus e)[u]$ ripristinando il grado di v perso con l'eliminazione del lato *e=uv*, quindi $\Delta(G)[u]=\Delta(G\setminus e)[u]+E$

ii) $A(G)[u]$ ovvero la matrice di adiacenza soppressa la colonna u e la riga u (ovvero tolto il vertice u a G-u) ha la stessa struttura della matrice di adiacenza di $G\setminus e$ tolta *u-esima* colonna e riga (ovvero tolto u da $G\setminus e$, G\e-u) cioè $A(G\setminus e)[u]$



in definitiva:

$Q[u]=\Delta(G\setminus e)[u]+E-A(G\setminus e)[u]=Q(G\setminus e)[u]+E$

Analizziamo $Q(G\setminus e)[u]+E$ ai fini del calcolo del determinante, rappresentiamo le matrici in vettori di colonne

$Q(G\setminus e)[u]=[q_1,\dots,q_v,\dots,q_{n-1}]; E=[0_1,\dots,1_v,\dots,0_{n-1}]$

con q_i *i-esimo* vettore colonna di $Q(G\setminus e)[u]$; 0_i vettore colonna di tutti zero, 1_v vettore colonna tutto nullo tranne nella *v-esima* componente in cui vale 1.

$Q(G\setminus e)[u]+E=[q_1+0_1,\dots,q_v+1_v,\dots,q_{n-1}+0_{n-1}]$

Procediamo ora al calcolo del determinante: il determinante può essere inteso come un operatore lineare su ogni colonna, quindi

$det([q_1+0_1,\dots,q_v+1_v,\dots,q_{n-1}+0_{n-1}])=\dots$

$det([q_1,\dots,q_v,\dots,q_{n-1}])+det([q_1,\dots,1_v,\dots,q_{n-1}])$

Utilizziamo la formula di Laplace per il calcolo del determinante di $[q_1,\dots,1_v,\dots,q_{n-1}]$, presa la *v-esima* colonna 1^T=[0,0,..,1,0,..0] (1 alla *v-esima* componente):

$det([q_1,\dots,1_v,\dots,q_{n-1}])=(-1)^{v+v}*det([q_1,\dots,1_v,\dots,q_{n-1}][v])$

$[q_1,\dots,1_v,\dots,q_{n-1}][v]$ è la matrice Laplaciana $Q(G\setminus e)[u,v]$ ed ha un unico minore moltiplicato per un valore non nullo con esponente pari, quindi avremo 1 come coefficinete del cofattore.

Unendo tutti i risultati:

$$det(Q[u])=det(Q(G\setminus e)[u])+det(Q(G\setminus e)[u,v])$$

Osserviamo che $Q(G\setminus e)[u,v]=Q[u,v]$.

Pensando a *G/e* con *e=uv* come una identificazione di *u* in *v* avremo che *V(G/e) = V(G) - u*, quindi *Q(G/e)[v]* avrà righe e colonne indicizzate dall'insieme dei vertici *V(G)\{u,v}* , in definitiva *Q(G/e)[v] = Q[u,v].* Con questo risultato riscriviamo la formula dei determinanti:

$det(Q[u])=det(Q(G\setminus e)[u])+det(Q(G/e)[v])$

Per ipotesi induttiva sul numero dei lati per $G\setminus e, G/e$ vale che:

i) $det(Q(G\setminus e)[u])=\tau(G\setminus e)$

ii) $det(Q(G/e)[v])=\tau(G/e)$

Questo conclude la dimostrazione ricordando $\tau(G)=\tau(G/e)+\tau(G\setminus e)$[]

Lemma 1.1 Sia $\tau(G)$ il numero degli alberi generanti di un grafo G=(V(G),E(G)) con |V(G)| =n e Q la sua matrice laplaciana, allora $adj(Q)=\tau(G)*J$

*Ricordiamo che la matrice aggiunta di una matrice Q quadrata è la trasposta della matrice dei complementi algebrici, se Q e simmetrica adj(Q) è simmetrica. Inoltre Q*adj(Q) = detQ*I. Dal teorema precedente osserviamo che la diagonale di adj(Q) è tutta uguale al numero degli alberi generanti di G, infatti per ogni u di V(G) il det(Q[u]) forma la diagonale del adj(Q)*

Dim. Se G non è connesso avremo che $\tau(G)=0$, inoltre Q ha al più rango n-2 e le sottomatrici *n-1xn-1* di Q della forma *Q[u]* sono singolari con *adj(Q)* nullo, quindi vale l'assunto.

Se G è connesso *adj(Q)* $\neq 0$, sfruttando la relazione *Q*adj(Q)=det(Q)*I=0* (det(Q)=0) quindi *adj(Q)* fa parte nello spazio nullo di *Q*, avendo assunto che G è connesso lo spazio nullo ha dimensione 1 ed è generato da **1** =[1,1,1,...,1]; *adj(*Q) simmetrico e costante quindi multiplo di *J*, $\{adj(Q)\}_{u,u} = (-1)^{u+u} det(Q[u])$. Dal teorema precedente sappiamo che la diagonale di *adj(Q)* tutta uguale al numero degli alberi generante, quindi sarà tutta uguale la numero degli alberi generati di G []

Alcuni risultati sul calcolo del determinante:

i) $det(A+u v^T)=det(A)+v^T*adj(A)*u$

ii) con $u^T=v^T= [1,1,...,1] = 1^T$ avremo che $uv^T=J$

Corollario Il numero degli alberi generanti di K_n sono n^{n-2}

Questo si dimostra sapendo che $Q[u] = nI_{n-1}-J$ per un grafo K_n

$det(Q[u]+J)=det(nI_{n-1})=n^{n-1}$

$det(Q[u]+1*1^T)=det(Q[u])+1^T*adj(Q[u])*1=k(G)+(n-1)k(G)$

$k(G)+(n-1)k(G)=n^{n-1}$

$k(G)=n^{n-2}$ []