IL TEOREMA DI KURATOWSKI

Sara Prevete

GE460 – Teoria dei Grafi
a.a. 2019/2020

Nello studio dei grafi la planarità è una proprietà fondamentale e il problema di decidere se un determinato grafo è planare o no è chiaramente di grande impotenza.
Un grande passo in avanti verso questo obiettivo è fornito dalla caratterizzazione dei grafi planari, dovuta a Kuratowski (1930)

Teorema di Kuratowski:

Un grafo è planare
se e solo se
non contiene suddivisioni di K_5 o $K_{3,3}$

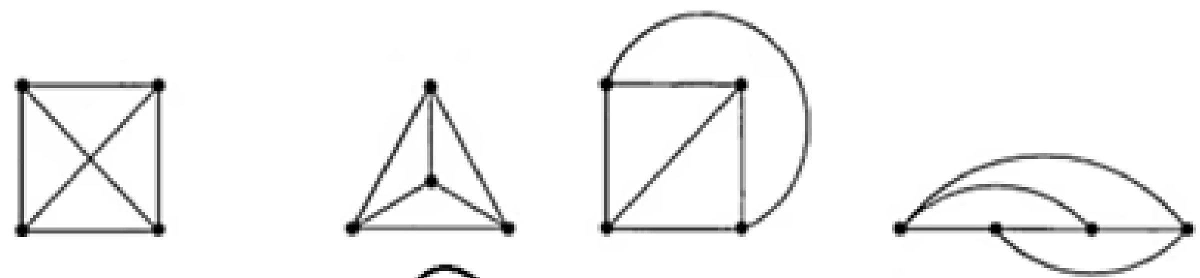
RICORDIAMO

Definizione: Un **grafo planare** è un grafo che può essere disegnato in modo che i lati non si intreccino mai, a parte che nei vertici.

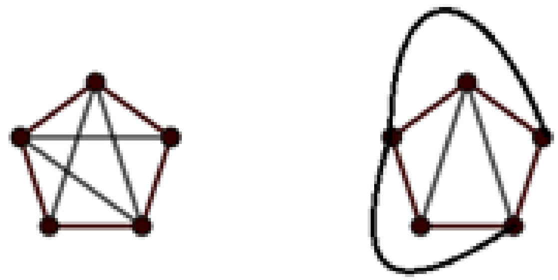
Una tale rappresentazione di un grafo *G*, quando possibile, viene chiamata **rappresentazione planare** o **immersione planare** e non è unica.

Non planari: Planari:

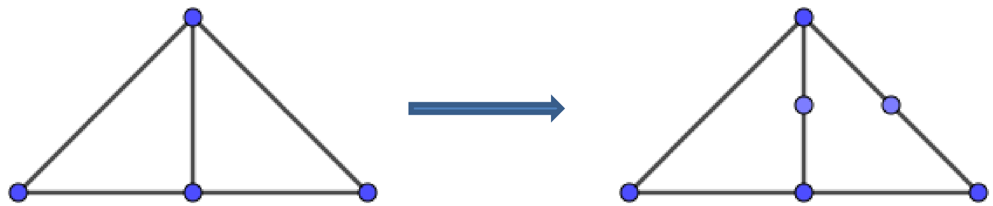
K_4 :



K_5/e :

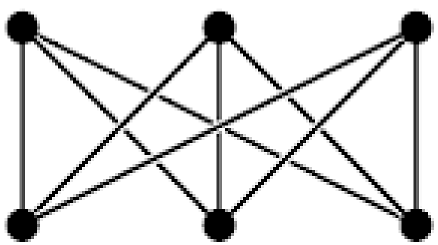


Definizione: Dato un grafo G, una **suddivisione di G** è un grafo G' ottenuto da G inserendo dei vertici all'interno dei lati di G.

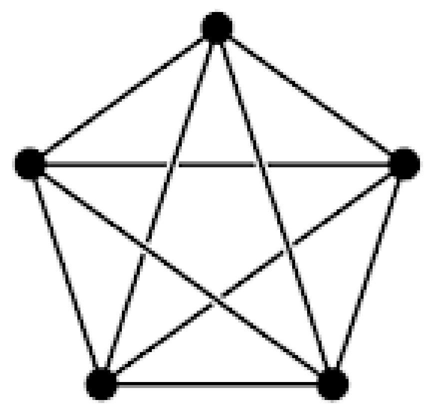


Lemma: Se G è un grafo non planare allora ogni sua suddivisione è non planare

Teorema: $K_{3,3}$ e K_5 non sono planari.



$K_{3,3}$



K_5

Una suddivisione di K_5 o $K_{3,3}$ è chiamata una **suddivisione di Kuratowski.**

I MINORI

Definizione: Un **minore di un grafo *G*** è qualsiasi grafo ottenuto da G per mezzo di una *sequenza di cancellazioni di vertici e lati e contrazioni di lati.*

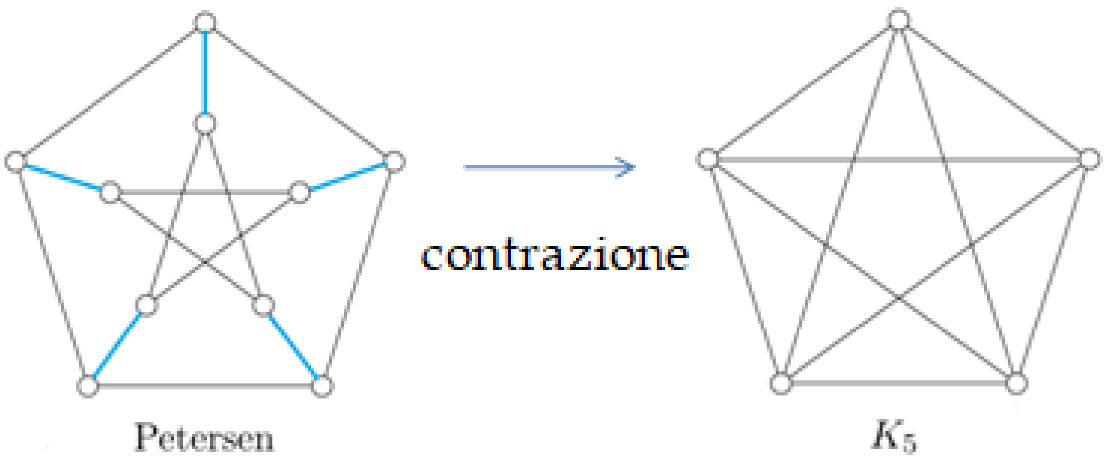
Cioè:

Consideriamo una partizione $(V_0, V_1, \dots, V_k)$ di V tale che $G[V_i]$ è connesso, con $1 \leq i \leq k$.

Sia H il grafo ottenuto da G eliminando V_0 e restringendo ciascun sottografo indotto $G[V_i]$, con $1 \leq i \leq k$, a un singolo vertice.

Allora qualsiasi *sottografo ricoprente* F di H è un minore di G.

Esempio: K_5 è un minore del *grafo di Petersen* .



Con la notazione ***F-minore*** di G, dove F è un grafo arbitrario, intendiamo un minore di G che è *isomorfo a F.*

RICORDIAMO: due grafi G e H si dicono **isomorfi** se esistono biiezione

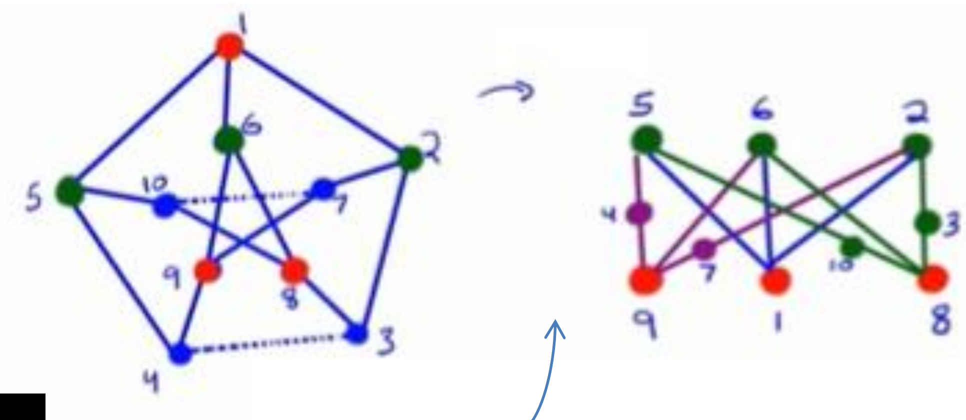
$\sigma: V(G) \longrightarrow V(H)$ e $\varphi: E(G) \longrightarrow E(H)$ tali che

se $\psi_G(e) = uv$ allora $\psi_H(\varphi(e)) = \sigma(u)\,\sigma(v)$

Qualsiasi grafo che contiene una F-suddivisione ha anche un F-minore.

Infatti per ottenere F come minore, si eliminano i vertici e i lati che non sono nella suddivisione e poi si contrae ciascun lato suddiviso su un singolo lato.

Esempio:
Il *grafo di Petersen* contiene una suddivisione $K_{3,3}$ allora ha anche un minore $K_{3,3}$.



Suddivisione

Minore

TEOREMA DI WAGNER

Osservazione: la cancellazione o la contrazione di un lato in un grafo planare si traduce nuovamente in un grafo planare.

Proposizione: I minori dei grafi planari sono planari.

Definizione: Un minore che è isomorfo di K_5 o $K_{3,3}$ è chiamato **minore di Kuratowski.**

$\longrightarrow$ **Se un grafo ha un minore di Kuratowski allora non è planare.**

Ci manca da far vedere il viceversa, mostrato nel teorema di Wagner (1937).

Teorema di Wagner:

Un grafo è planare se e solo se non ha un minore di Kuratowski.

So che un grafo che contiene una *F-suddivisione* ha anche un *F-minore*.

Teorema di Kuratowski $\longrightarrow$ *Teorema di Wagner.*

D'altra parte, qualsiasi grafo che ha un $K_{3,3}$ come minore contiene anche $K_{3,3}$ come suddivisione.

Inoltre, qualsiasi grafo che ha K_5 come minore contiene necessariamente una suddivisione di Kuratowski.

Teorema di Wagner $\longrightarrow$ *Teorema di Kuratowski.*

Possiamo affermare allora che:

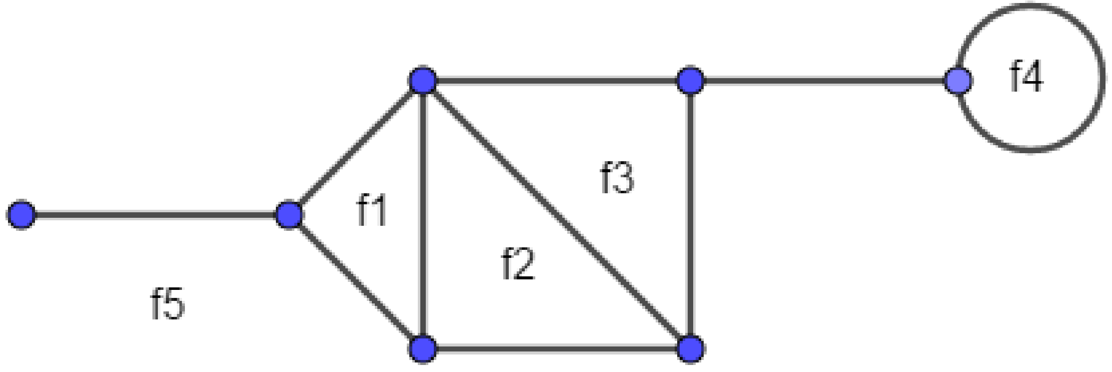
Teorema di Kuratowski $\longleftrightarrow$ **Teorema di Wagner**

Per mostrare il teorema di Kuratowski risulta quindi più conveniente dimostrare il teorema di Wagner.

RICORDIAMO :

Definizione: Se G è un grafo planare una sua rappresentazione planare induce una decomposizione di G in $R^2 \backslash G$ in regioni connesse per archi, chiamate **facce di *G*.**

Tutte le facce sono limitate tranne una che viene chiamata faccia all'infinito.



Componente marcata:

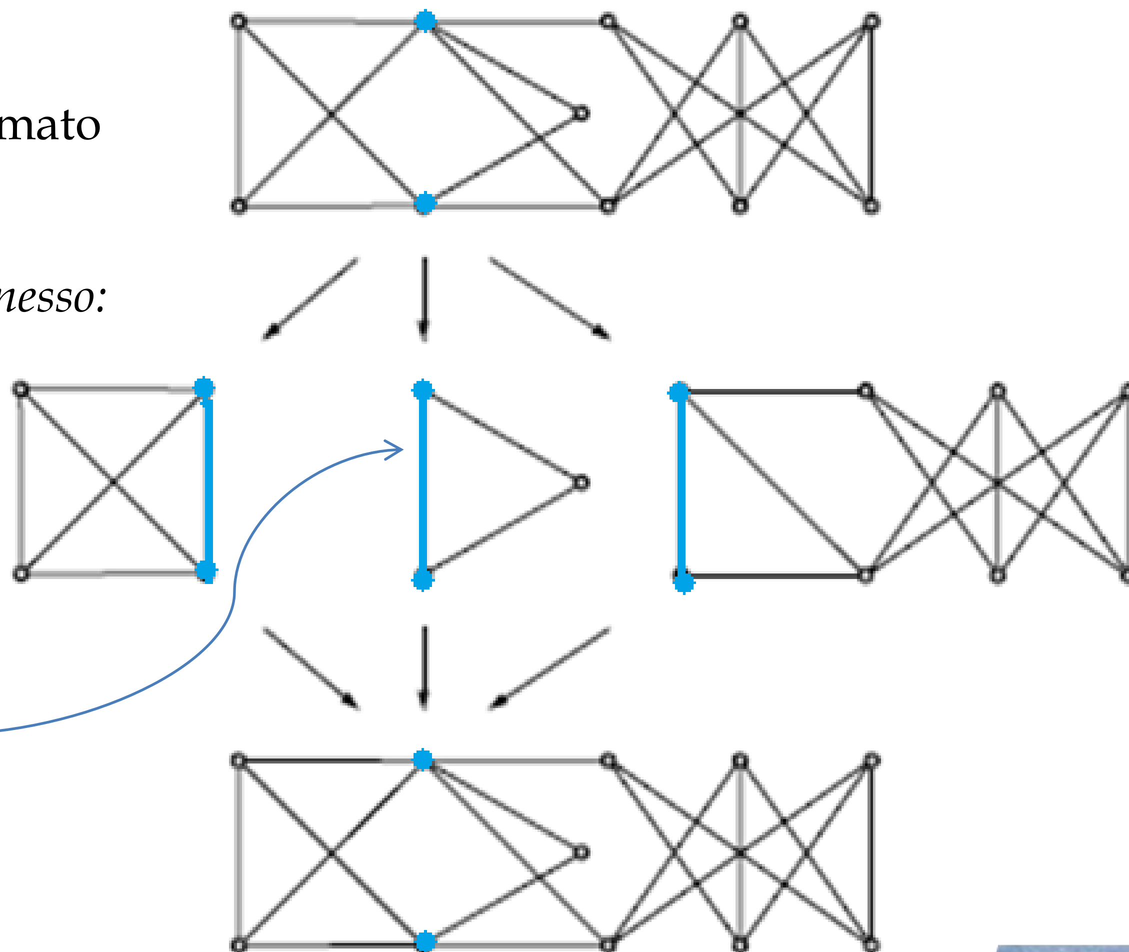
Sia G un grafo connesso che non è completo, sia S un taglio di vertici di G, e sia X l'insieme di vertici di una componente connessa di G - S.

Definizione:
Il sottografo H di G indotto da $S \cup X$ è chiamato ***S*-componente** di G.

Nel caso in cui G è 2-connesso:

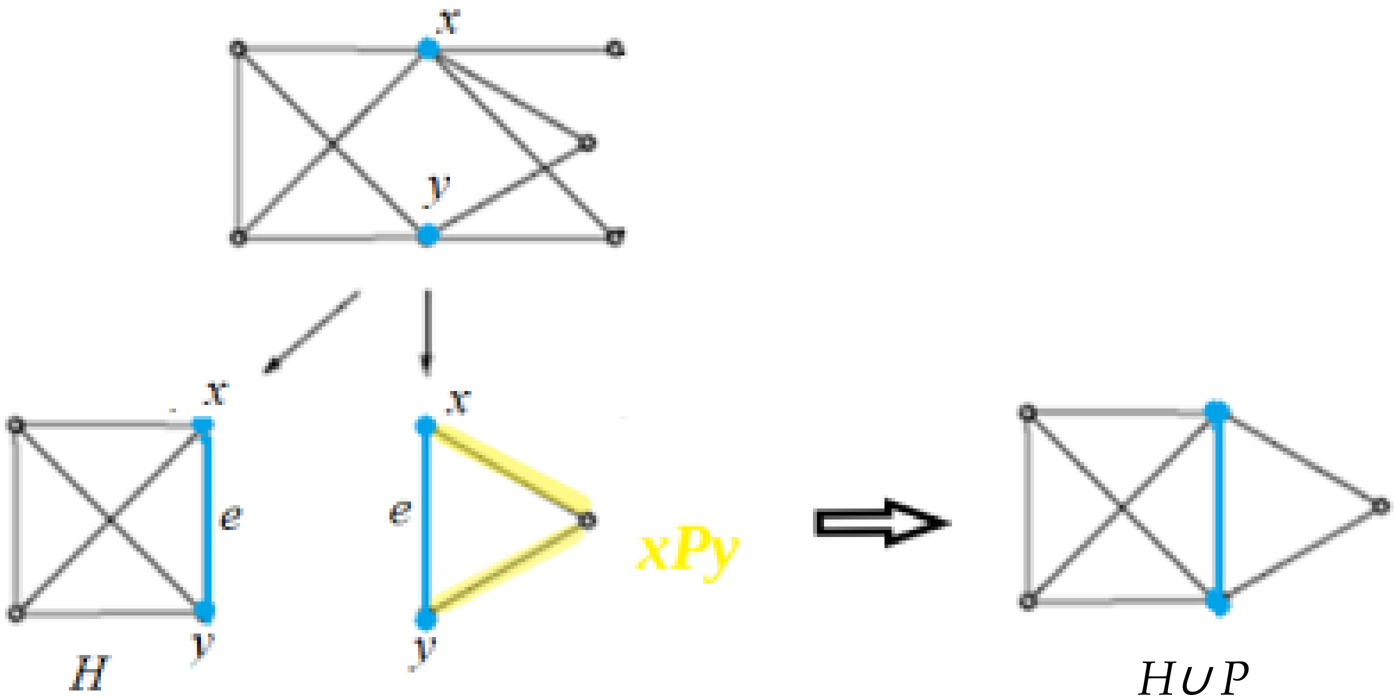
S-componenti marcate:

Lato marcatore



Lemma1: Sia G un grafo con un taglio con 2 vertici {x, y}.
Allora ogni componente marcata {x, y} di G è isomorfa a un minore di G.

Dimostrazione Lemma1:
Sia H una {x, y}-componente di G, con il lato marcatore e.
Sia inoltre xPy un cammino in un'altra {x, y}-componente di G.
Allora $H \cup P$ è un sottografo di G.
Ma $H \cup P$ è isomorfo a una suddivisione di $G + e$, quindi $G + e$ è isomorfo a un minore di G.



Lemma2: Sia G un grafo con un taglio con 2 vertici {x, y}.
Allora G è planare se e solo se ciascuna delle sue {x, y}-componenti marcate è planare.

Dimostrazione Lemma2:
Sia G planare.
Dal Lemma1 so che ogni {x, y}-componente marcata di G è isomorfa a un minore di G, quindi è planare.
Viceversa, supponiamo che G abbia k {x, y}-componenti marcate, ognuna delle quali è planare. Sia e il loro lato marcatore comune.
Posso applicare il fatto che se $G1$ e $G2$ sono grafi planari la cui intersezione è isomorfa a K_2, allora $G1 \cup G2$ è planare;
e per induzione su k ne consegue che $G + e$ è planare.
Quindi anche G è planare.

È ora sufficiente dimostrare il teorema di Wagner per i grafi a 3-connessi:

G 3-connesso non è planare $\longleftrightarrow$ G ha un minore di Kuratoski

$\rightarrow$) la vedremo tra poco
$\leftarrow$) è banalmente vera

Bridges

Sia H un sottografo proprio di un grafo connesso G.

L'insieme $E(G) \setminus E(H)$ può essere suddiviso in classi come segue:

- Per ogni componente connessa F di $G - V(H)$, esiste una classe costituita dai lati di F e dai lati che collegano F a H.
- Ogni lato rimanente e (ovvero un lato che ha entrambe le estremità in $V(H)$) definisce una classe $\{e\}$.

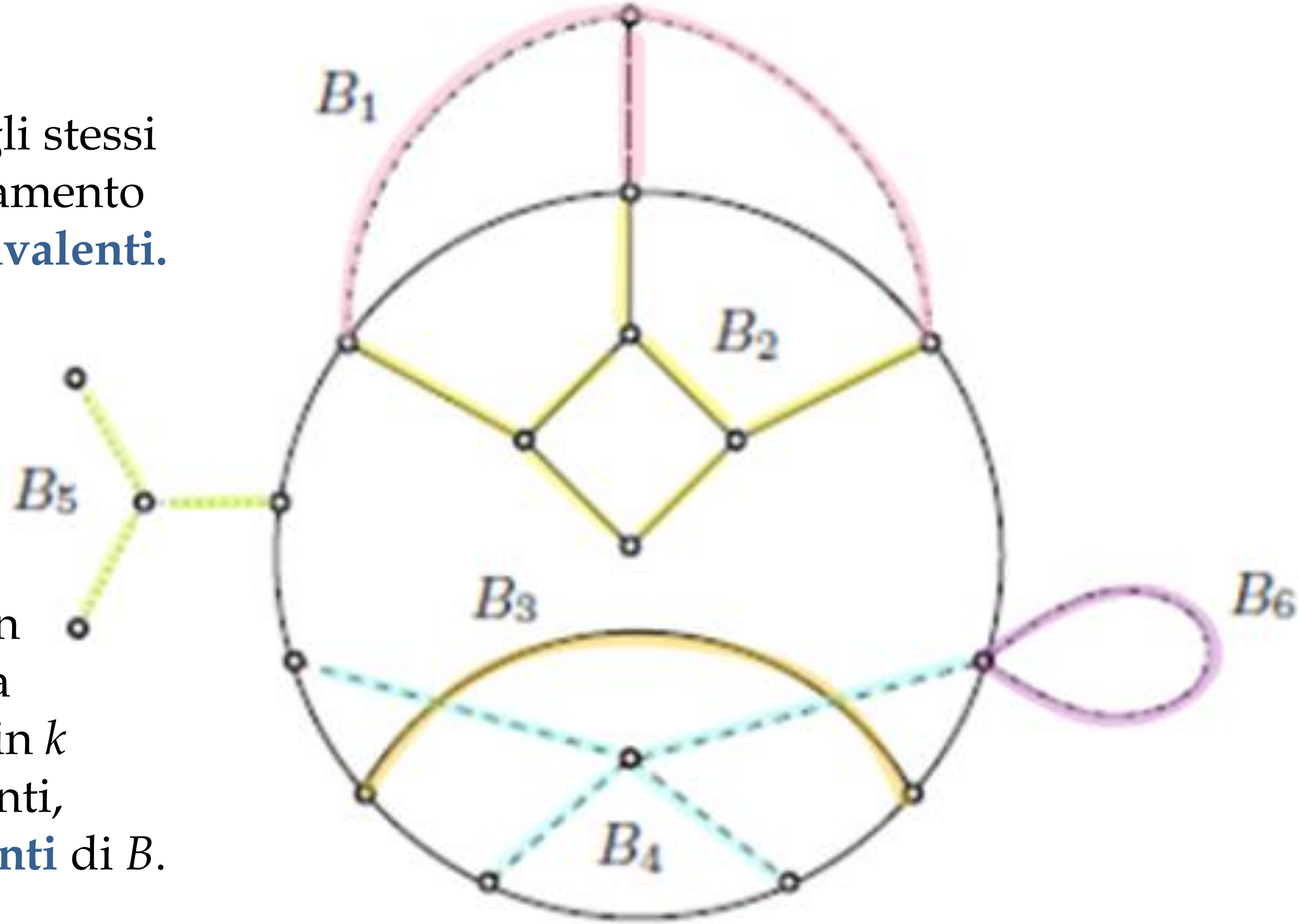
I sottografi di G indotti da queste classi sono i ponti (bridges) di H in G.

Per un ponte B di H, gli elementi di $V(B) \cap V(H)$ sono chiamati i **suoi vertici di attaccamento** a H; i vertici rimanenti di B sono i suoi vertici interni.

In un grafo connesso ogni ponte ha almeno un vertice di attaccamento.

Un ponte con k vertici di attaccamento è chiamato ***k*-ponte**.

Due ponti con gli stessi vertici di attaccamento sono **ponti equivalenti.**



I vertici di attaccamento di un k-ponte B con $k \geq 2$ danno una partizione di C in k cammini disgiunti, chiamati **segmenti** di B.

Due ponti si **evitano** se tutti i vertici di attaccamento di un ponte si trovano in un singolo segmento dell'altro. In caso contrario si **sovrappongono.**

Due ponti B e B ʻ sono **inclinati (skew)** se ci sono vertici di attaccamento u, v di B *distinti* da quelli u', v' di B', e si trovano nell'ordine u, u', v, v' su C.

Teorema: I ponti sovrapposti sono: inclinati o equivalenti a 3-ponti

Corollario: In un grafo planare 3-connesso senza loop i vicini di ogni vetrice giacciono in uno stesso cilco.

Teorema: Sia *G* un grafo 3-connesso su almeno cinque vertici. Allora G contiene un lato e tale che *G/e* è 3-connesso.

Teorema:

Ogni grafo non planare 3-connesso ha un minore di Kuratowski.

Dimostrazione:

Sia G un grafo non planare 3- connesso.
Possiamo supporre che G sia semplice con $n \geq 5$.

Procediamo per induzione su n.

G contiene un lato $e = xy$ tale che $H: = G/e$ è 3-connesso.

Se H non è planare allora ha un minore di Kuratowski, per induzione.

Poiché ogni minore di H è anche minore di G, deduciamo che anche G ha un minore di Kuratowski.

Quindi possiamo supporre che H sia planare.

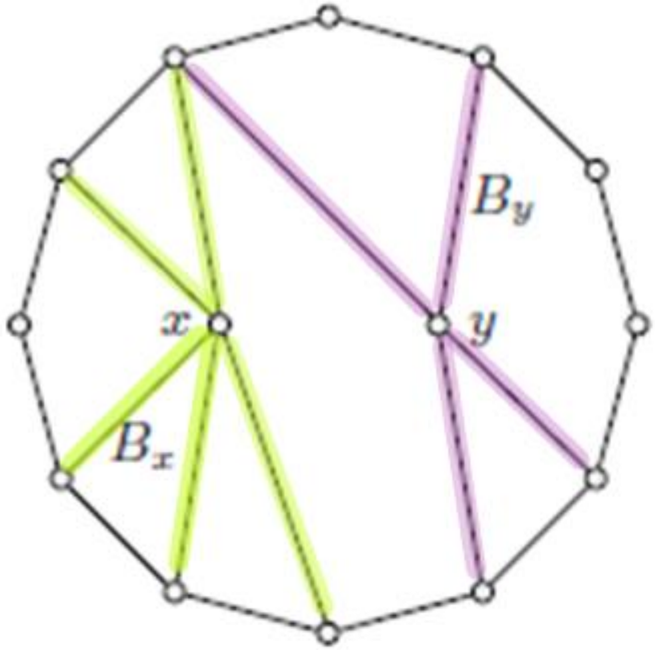
Consideriamo una rappresentazione planare H^* di H.

Indichiamo con z il vertice di H formato contraendo e.

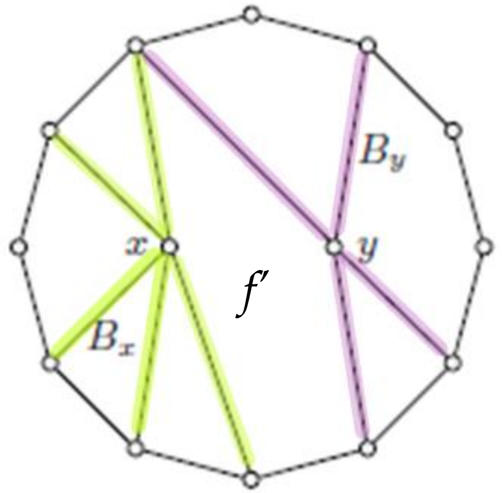
Poiché H è senza loop ed è 3-connesso sappiamo che i vicini di z giacciono su un ciclo C, che è il bordo di una faccia f di $H^* - z$.

Indichiamo con B_x e B_y, rispettivamente, i ponti di C in $G \backslash e$ che contengono i vertici x e y.

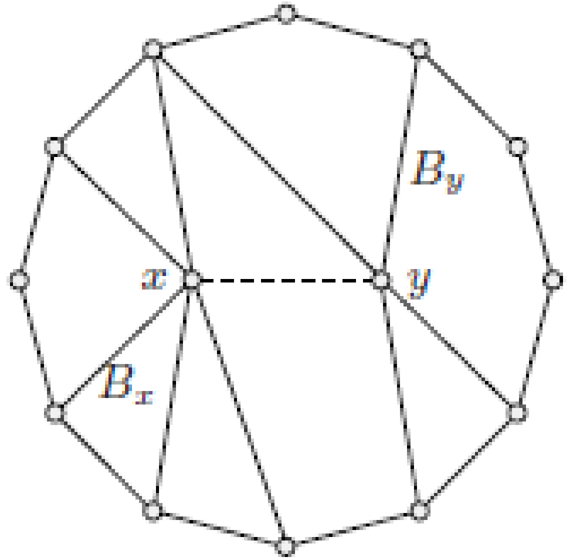
Supponiamo che B_x e B_y **non** si tocchino.



In questo caso, B_x e B_y possono essere incorporati nella faccia *f* di H^* - z in modo tale che i vertici x e y appartengano alla stessa faccia f' del grafo planare risultante $(H^* - z) \cup B^*_x \cup B^*_y$



Il lato *xy* ora può essere disegnato in quella faccia in modo da ottenere una rappresentazione planare di *G* stesso, contraddicendo l'ipotesi che *G* non sia planare.

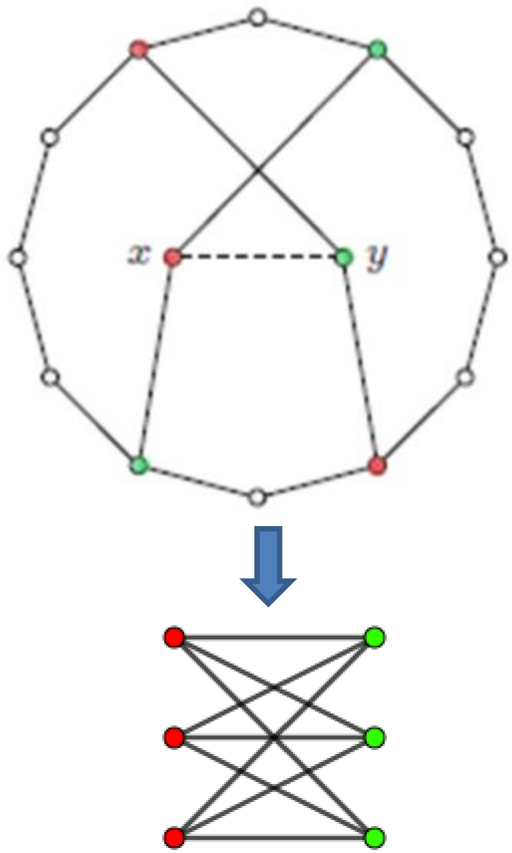


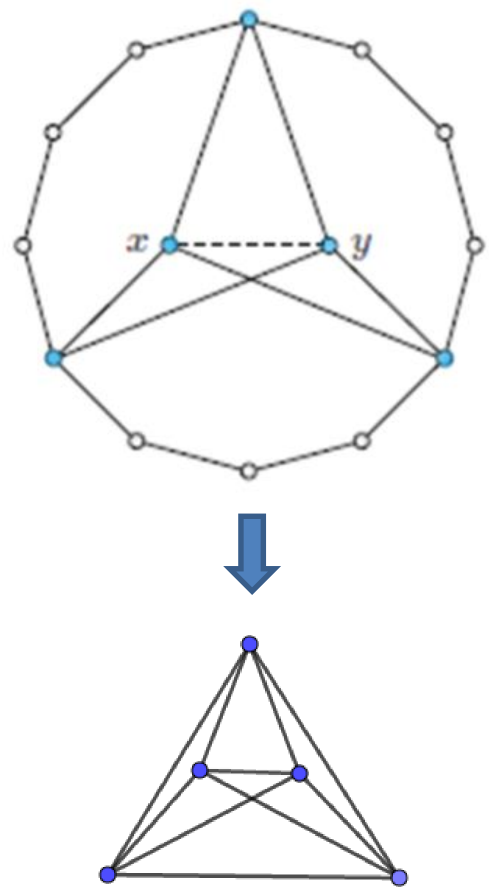
Ne consegue che B_x e B_y **non** si evitano a vicenda, cioè **si sovrappongono**.

Posso allora dire che sono quindi o inclinati o equivalenti a 3-ponti.

Ho quindi due casi:

G ha $K_{3,3}$ come un minore *oppure* G ha K_5 come un minore





RIEPILOGANDO

Per dimostrare il teorema di Kuratowski abbiamo:

- Definito cosa sono i minori di un grafo;
- Presentato il teorema di Wagner, equivalente al teorema di Kuratowski;
- Dimostrato il lemma1 e lemma2 che ci hanno permesso di riportare il teorema di Wagner ai grafi 3-connessi;
- Presentato cosa sono i ponti di un grafo e le loro caratteristiche;
- Dimostrato il teorema per i grafi 3-connessi.

Bibliografia:

- **Graph Theory**. Authors: **Bondy** Adrian, **Murty** M. Ram.

Sitografia:

- https://external-preview.redd.it/ofi1uork7a4ERyrRMJFrvQ3J7tmlgghqqh49wtT09tE.gif?format=mp4&s=6621ce1cc316608637cb9b84dbec9992dc2c3170

Fine

Grazie per l'attenzione