# Matroidi 2: esempi e la funzione rango

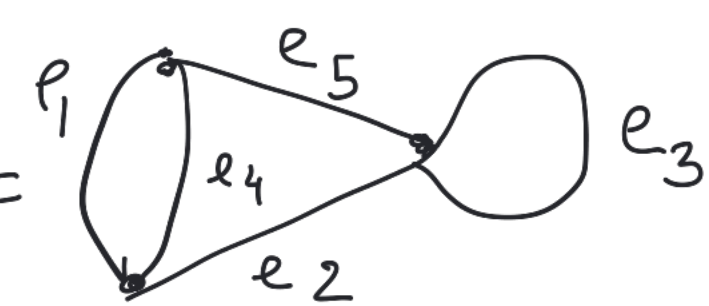
**Def** Siano $M_1$ e $M_2$ matroidi. Diciamo che $M_1$ e $M_2$ sono *isomorfe*, e scriviamo $M_1 \cong M_2$, se esiste una biezione

$$\psi : E(M_1) \longrightarrow E(M_2)$$

t.c. $\forall X \subset E(M_1)$, $X$ è indipendente in $M_1$ $(X \in \mathcal{I}(M_1))$ se e solo se $\psi(X)$ è indipendente in $M_2$ $(\psi(X) \in \mathcal{I}(M_2))$.

(equiv, se $X \in \mathcal{B}(M_1) \iff \psi(X) \in \mathcal{B}(M_2)$).

**Esempio / Esercizio**

Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $G =$ 


Allora $M[A] \cong M(G)$.

$A$ con coef. in $\mathbb{R}$

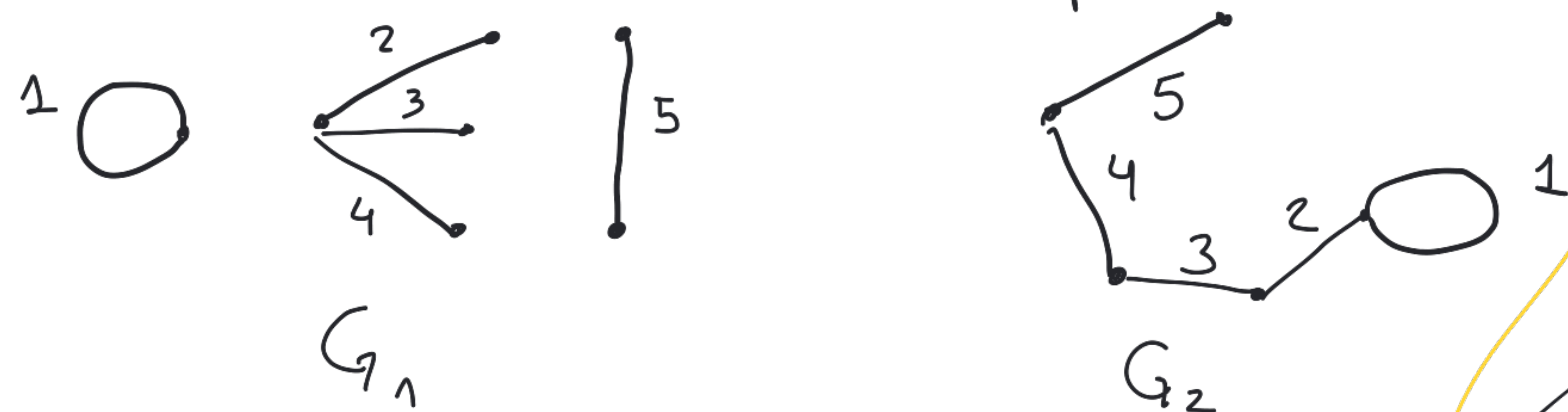
**Def.** Una matroide è detta grafica se è isomorfa a $M(G)$, per un certo grafo $G$.

**Def** Una matroide $M$ e' detta rappresentabile su un campo $F$ se esiste una matrice $A$ a coeff in $F$ t.c. $M \cong M[A]$.
$M$ si dice rappresentabile se è rappresentabile su ogni campo.

**OSS** L'esempio precedente implica che ci sono matroide grafiche e anche rappresentabili su certi campi.

Vedremo (seminario?) che ogni matroide grafica è rappresentabile su ogni campo (Oxley, § 5) e se riusciamo ad ottenere $G$ a partire da $M(G)$.

E' facile vedere che grafi non isomorfi possono avere matroidi cicliche isomorfe:




<u>Esercizio</u>: $M(G_1) \cong M(G_2)$.

<u>Prop.</u> Sia $M$ una matroide grafica. Allora $M \cong M(G)$, per un certo grafo connesso $G$.

<u>dim</u> Sia $M \cong M(H)$. Se $H$ è connesso, ok, altrimenti sia $G$ ottenuto da $H$ identificando un vertice di ciascuna componente connessa di $H$ in un unico vertice di $G$. Allora $G$ è connesso e $M(G) \cong M(H) \cong M$ (l'identificazione non crea nuovi cicli). ■

**Def** • Un **loop** (cappio?) di una matroide $M$ e' un'elemento $e \in E(M)$: $\{e\} \in \mathcal{C}(M)$.

• Una coppia di elementi di $E(M)$, $e, f$, si dicono **paralleli** se $\{e,f\} \in \mathcal{C}(M)$.

• $M$ è detto **semplice** se non ha loops nè lati paralleli.

**Esempi**

• Se $M = M(G)$, $e \in E(M)$ è un loop se e solo se è un loop del grafo e $f_1, f_2$ sono paralleli se sono una coppia di lati multipli tra gli stessi vertici.


• Se $M = M[A]$, $e \in E(M)$ è un loop se $e = \underline{0} \in \mathbb{K}^m$, se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Invece $e_1, e_2 \in E(M)$ sono paralleli se uno è multiplo dell'altro in $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & k a_1 \\ 0 & a_2 & k a_2 \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_m & k a_m \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} e \quad & \quad e_1 \quad & \quad e_2 \end{array} \end{array}$$

Esempi di matroide:

- Matroide banale $M = (E, \emptyset)$
- Matroide discreta $M = (E, \mathcal{P}(E)) = (E, \mathcal{I})$

  $\cdot\ \mathcal{B} = \{E\}$ , $\cdot\ \mathrm{RK}(M) = |E|$.

- Matroide uniforme: dati interi non-negativi con $m \leq n$ e $E$ un insieme con $n$ elementi, definiamo

$$U_{m,n} = (E, \mathcal{B}), \quad \text{con } \mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sottoinsiemi di } E \text{ con} \\ m \text{ elementi} \end{array} \right\}$$

Oss/Esercizi: per $m \geq 2$, $U_{m,n}$ è semplice

- $U_{n,n}$ non ha sottoinsiemi dipendenti.
- $\mathrm{RK}(U_{m,n}) = m$.

- Matroidi rappresentabili

Sia $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array}$, con coeff. in $\mathbb{F}_3$.

Sia $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Allora $W$ è uno spazio vettoriale di dim 2 su $\mathbb{F}_3$.

Quindi le basi di $M[A]$ hanno cardinalità 2 e infatti vediamo che in questo esempio tutti i sottoinsiemi di cardinalità 2 di $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono basi.

Ottieniamo quindi che $M[A] \cong U_{2,4}$ e quindi che $U_{2,4}$ è rappresentabile su $\mathbb{F}_3$ (anche detto ternario).

- [Matroide binari] Sono matroide rappresentabili sul campo $\mathbb{F}_2$.
- [Matroide <u>regolari</u>] Sono matroide rappresentabili su $\mathbb{R}$ attraverso una matrice unimodulare $A$, ossia, una matrice avendo tutti i minori uguali a $\{0, 1, -1\}$.

<u>Esercizio</u>: $U_{2,4}$ non è binaria.

<u>Fatti</u> (capitoli 5 e 6 su Oxley ~ seminario?)

- Ogni matroide grafica è regolare
- Una matroide è regolare se è rappresentabile su ogni campo.

## Rango

**Def** Sia $M = M(E, \mathcal{I})$ una matroide e sia $X \subset E$. Allora definiamo la matroide restrizione da $M$ a $X$ come $M|X$ o $M \setminus (E - X)$ come $M = M(X, \mathcal{I}|X)$,

con
$$\mathcal{I}|X = \{ I \subseteq X : I \in \mathcal{I} \}.$$

**Ex.** $M|X$ è una matroide.

**Def.** Dato $X \subset E$, definiamo $R(X) = rk(X) := rk(M|X)$

**Esercizio** $rk(X)$ è il più grande ordine di un sottoinsieme di $X$ che sia indipendente.

Definiamo quindi una funzione rango:

$$r_M : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_0$$
$$X \longmapsto RK(X) =: R(X)$$

$\underline{\text{OSS}}$ $X \subset E$ è indipendente se $r(X) = |X|$

$\Longrightarrow$ È possibile definire matroide in termine della funzione rango.

$\leadsto$ È chiaro che $r$ soddisfa le proprietà seguenti:

(R1) se $X \subseteq E$, allora $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R2) se $X \subseteq Y \subseteq E$, allora $r(X) \leq r(Y)$.

**Lemma** Sia $M$ una matroide nell'insieme $E$. Allora, vale la seguente proprietà:

(R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$, $\forall X, Y \subset E$.

**dim.** Sia $B_{X \cap Y}$ una base di $M|(X \cap Y)$ $(\Rightarrow r(X \cap Y) = |B_{X \cap Y}|)$

- Sia $B_X \supset B_{X \cap Y}$ una base di $M|X$ $(\Rightarrow r(X) = |B_X|)$
- Sia $B_{X \cup Y} \supset B_X$ una base di $M|(X \cup Y)$

$\Rightarrow (r(X \cup Y) = |B_{X \cup Y}|)$.

Siccome $B_{X \cap Y} \cup (B_{X \cup Y} - B_X) \subset Y$

è indipendente $\Rightarrow r(Y) \geq r(B_{X \cap Y} \cup (B_{X \cup Y} - B_X))$

$= |B_{X \cap Y}| + |B_{X \cup Y}| - |B_X| = r(X \cap Y) + r(X \cup Y) - r(X)$ ∎

<u>Teorema</u> Sia $E$ un' insieme e

$$r : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

che soddisfa (R1) + (R2) + (R3).

Sia $\mathcal{I}$ la collezione dei sottoinsiemi $X$ di $E$ t.c $r(X) = |X|$. Allora $(E, \mathcal{I})$ è una matroide avendo funzione rango uguale a $R$.

<u>dim</u>. Dobbiamo far vedere che $\mathcal{I}$ soddisfa $(\mathcal{I}1), (\mathcal{I}2), (\mathcal{I}3)$.

$(\mathcal{I}1)$: Per (R1), $0 \leq R(\emptyset) \leq 0 \Rightarrow R(\emptyset) = |\emptyset| \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{I}$.

$(\mathcal{I}2)$: Sia $I_1 \subset I_2$, con $I_2 \in \mathcal{I}$, ossia, con $R(I_2) = |I_2|$.

$\overset{?}{\Rightarrow} I_1 \in \mathcal{I}$, ossia, che $r(I_1) = |I_1|$.

Applichiamo (R3) a $I_1$ e $I_2 \setminus I_1$.

$$R(I_1) + R(I_2 \setminus I_1) \geq R(I_1 \cup (I_2 \setminus I_1)) + R(\emptyset)$$

$$R(I_1) + R(I_2 \setminus I_1) \leq |I_1| + |I_2 \setminus I_1| = |I_2|$$

$$R(I_1 \cup (I_2 \setminus I_1)) + R(\emptyset) = R(I_2) + 0 = |I_2|$$

$$\Rightarrow R(I_1) = |I_1| \text{ e } R(I_2 \setminus I_1) = |I_2 \setminus I_1|$$

(I3): Siano $I, J \subset E$ t.c. $R(I) = |I|$, $R(J) = |J|$, con $|J| > |I|$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \exists\, e \in J : R(I \cup e) = |I \cup e| = |I| + 1.$$

Supp, p.a., che $\forall e \in J \setminus I$, $R(I \cup e) = |I|$.

Se $\exists!\, e \in J \setminus I$, allora $I \subset J$ e $I \cup e = J$

Ma per ipotesi $R(J) = R(I \cup e) = R(I)$ ↯

- Se $\exists\, e, f \in J \setminus I$, allora

$$R(I \cup e \cup f) \leq R(I \cup e) + R(I \cup f) - R(I) \overset{\text{ipotesi}}{=} R(I)$$

Procedendo aggiungendo nuovi elementi di $J \setminus I$ a $I$, concludiamo che $R(I) = R(J)$ ↯

Manca dimostrare che la funzione rango in questa matroide coincide con la funzione data.

ossia, dato $X \subset E$ con $r(X) = a$, allora

$$a = r(X) = \max\{|Y| : Y \subset X \text{ e } |Y| = r(Y)\}$$

→ esercizio (Oxley, 25). ∎

**Prop.** Sia $M$ una matroide con funzione rango $r$ e supp che $X \subset E(M)$. Allora

(i) $X \in \mathcal{I}(M) \iff |X| = r(X)$;

(ii) $X \in \mathcal{B}(M) \iff |X| = r(X) = r(M)$;

(iii) $X \in \mathcal{C}(M) \iff X \neq \emptyset$ e, $\forall x \in X$,

$$r(X - x) = |X| - 1 = r(X).$$

**dim** (esercizio).

OSS/Es. • $e \in E(M)$ è un loop sse $r(e) = 0$

• $e, f \in E(M)$ sono paralleli sse $r\{e, f\} = 1$

Esempi

- Sia $M = U_{m,n}$ e $X \subset E(M)$. Allora

$$R(X) = \begin{cases} |X|, & \text{se } |X| \leq m, \\ m, & \text{se } |X| \geq m \end{cases}$$

- Se $M = M[A]$, con $E(M) = \{v_1, \dots, v_n\}$

Allora se $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, $R(X) = \dim\langle x_1, \dots, x_k \rangle$.

- Se $M = M(G)$, allora $R(M) = |V(G)| - c(G)$

e, dato $X \subset E(G)$,

$$r(X) = |V(G[X])| - c(G[X]).$$