Operatore chiusura in una matroide

Idea: Se V e' uno spazio vettoriale e se $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, allora $\dim\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \dim\langle v_1, \dots, v_n, v\rangle$

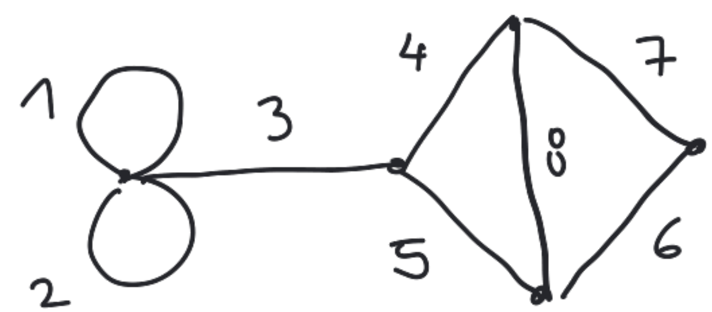
Sia M una matroide in E e r sua funzione rango.

Definiamo $cl : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

operatore chiusura

$$X \longmapsto cl(X) := \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}.$$

Esempio $M = M(G)$, $G =$



$cl(\varnothing) = \{1,2\}$

$cl(\{1,3,5\}) = \{1,2,3,5\}$

$cl(4) = \{1,2,4\}$

$cl\{4,5\} = \{1,2,4,5,8\}$

$r(M) = 4$

$r(\{4,5,6,7,8\}) = 3 = r(\{1,2,4,5,6,7,8\})$

$= r(\{4,5,6\}) \Rightarrow cl(\{4,5,6\}) = \{1,2,4,5,6,7,8\}$

<u>OSS</u>. Sia $X \subset E$ e $x \in E$. Allora,

$$r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$$

Infatti, se B è una base di X, allora o B o $B \cup x$ è una base di $X \cup \{x\}$.

<u>Lemma</u> Sia M una matroide in E e cl il suo operatore chiusura.

Allora cl soddisfa:

(CL1) Se $X \subseteq E \Rightarrow X \subseteq cl(X)$;

(CL2) Se $X \subseteq Y \subseteq E$, allora $cl(X) \subseteq cl(Y)$

(CL3) Se $X \subseteq E$, allora $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(CL4) Se $X \subseteq E$, $x \in E$ e $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$, allora $x \in cl(X \cup y)$.

<u>dim</u> CL1 ok

dim CL2, CL3 esercizio

(CL4) Supp. che $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$.

Allora $r(X \cup x \cup y) = r(X \cup x)$

e $r(X \cup y) > r(X)$

$\Rightarrow r(X \cup y) = r(X) + 1$.

Quindi,

$$r(X)+1 = r(X \cup y) \leq r(X \cup y \cup x) = r(X \cup x) \leq r(X) + 1$$

$$\Rightarrow r(X \cup y \cup x) = r(X \cup y) \Rightarrow x \in cl(X \cup y)$$

∎

(1.4.4) **Teorema** Oxley Sia E un'insieme e $cl : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ un'operatore che soddisfa (CL1)-(CL4). Allora se definiamo

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : x \notin cl(X-x),\ \forall x \in X\},$$

$M = (E, \mathcal{I})$ è una matroide avendo operatore chiusura cl.

dim

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$ ok

(I2) Sia $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subset I$.

Dato $x \in I'$, $x \in I \Rightarrow x \notin cl(I-x)$

Ma $cl(I'-x) \subset cl(I-x)$ per (CL2),

quindi $x \notin cl(I'-x) \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$.

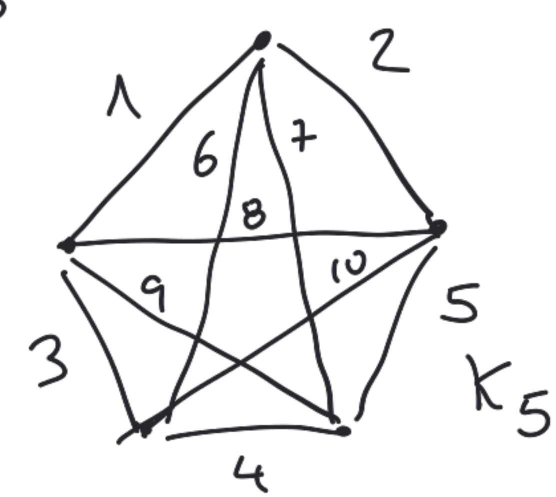
$\boxtimes$

(I3) (...)

Def. Data una matroide M con operatore di chiusura cl, definiamo:

- un *flat* o un *chiuso di M* come un sottoinsieme $X \subset E$ t.c. $cl(X) = X$.
- un'*iperpiano* è un flat di M di rango $r(M) - 1$.
- un *generatore* di M è un sottoinsieme X di E t.c. $$cl(X) = E.$$

Esempio



- $\emptyset$ è un flat di rango 0
- $\{1, 2, 8\}$ è un flat di rango 2
- $\{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$ è un flat di rango 3 $\rightarrow$ un'iperpiano.
- Un generatore è un qualunque insieme di 4 lati che non abbia cicli.

Oss/Es. $X \subset E$ è un flat se $r(X \cup x) > r(X)$, $\forall x \in X^c$.

Un'iperpiano è un flat proprio massimale.

Prop. i) $X \subset E$ è generatore se $r(X) = r(M)$.

ii) $X \subset E$ è una base se è un generatore minimale.

iii) X è un'iperpiano se è un non generatore massimale.

dim

i) X generatore se $cl(X) = E$, ossia, $\forall x \in X^c$,

$r(X \cup x) = r(X) \Longleftrightarrow X$ contiene una base B di M.

$\Longleftrightarrow r(X) = r(B) = r(M)$.

ii) iii) esercizio

<u>Esempi</u> • $U_{m,n}$: flats sono i sottoinsiemi con meno di m elementi e $E(U_{m,n})$ pure.

Gli iperpiani sono i sottoinsiemi con $m-1$ elementi.

• Se $M = M[A]$ è vettoriale, con $A = [v_1, \dots, v_n]$, un sottoinsieme $\{w_1, \dots, w_s\} \subset \{v_1, \dots, v_n\}$ è un flat se esiste un sottospazio $W \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$:

$$\{w_1, \dots, w_s\} = \{v_1, \dots, v_n\} \cap W.$$

• Se $M = M(G)$, G grafo, $H \subset E(G)$ è un iperpiano in $M(G)$ sse $E(G) - H$ è un sottoinsieme di lati minimale tra tutti i sottoinsiemi di lati la cui rimozione fa aumentare il numero delle componenti connesse di G.

Teorema Sia E un'insieme. Una funzione

$$r : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$$

e' la funzione rango di una matroide M se verifica:

(R1)' $r(\emptyset) = 0$;

(R2)' se $X \subseteq E$ e $x \in E$, $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$;

(R3)' se $X \subseteq E$ e $x, y \in E$ sono tali che

$$r(X \cup x) = r(X \cup y) = r(X),$$ allora

$$r(X \cup x \cup y) = r(X).$$

dim (esercizio)

Matroidi trasversali

Sia S un'insieme finito e $(A_1, .., A_m)$ una sequenza di sottoinsiemi di S.

Un trasversale (matching / sistema di rappresentanti distinti) di $(A_1, .., A_m)$ e' un sottoinsieme di $\{e_1, .., e_m\}$ di S t.c. $e_j \in A_j$, $\forall j \in \{1, .., m\} =: J$.

In altre parole, un trasversale di $(A_j : j \in J)$ e' un sottoinsieme $T \subseteq S$ t.c. $\exists$ una <u>biezione</u>

$$\begin{aligned} \psi : J &\longrightarrow T \\ j &\longmapsto \psi(j) \in A_j \end{aligned}$$

- Se $X \subseteq S$, X e' un trasversale parziale di $(A_j ; j \in J)$ se $\exists K \subseteq J$: X e' un trasversale di $(A_j : j \in K)$.

A un trasversale (parziale) $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ in S possiamo associare un grafo bipartito $\Delta(\mathcal{A})$ con

vertici : $S \cup J$

lati : $\{ xj : x \in S, j \in J, x \in A_j \}$

→ Applicazioni : problemi di tipo di organizzazione di orari, spazi.

Teorema (1.6.2 Oxley) Matroide $M[\mathcal{A}]$

Sia $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$ una collezione di sottoinsiemi di un insieme S. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme dei trasversali parziali di $\mathcal{A}$. Allora $\mathcal{I}$ e' la collezione dei sottoinsiemi indipendenti di una matroide in S.

Ancora esempi di matroidi

- **Matroidi cografici**

Dato un grafo G, definiamo $M^*(G)$ matroide cografica associata a G come

$$\boxed{M^*(G) = (E(G), \mathcal{C})}$$

↳ collezione dei circuiti di $M^*(G)$

con $\mathcal{C} = (X \subset E(G) : X$ è un taglio minimale di G).

→ Gli indipendenti sono gli insiemi di lati di G che non sconnettono G (i complementari contengono foreste generanti).

→ $R(M^*(G)) = \#(E(G)) - (\#|V(G)| - c(G))$

- Una matroide G t.c $\exists\, G : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}(G)$,
  $\exists\, G' : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}^*(G')$

ossia, che è allo stesso tempo grafica e cografica,

è detta una matroide planare.

⇝ Corrispondono a grafi planari?

- Def Una matroide G si dice bipartita se ogni suo circuito ha un numero pari di elementi.

Esempio
- Se G è un grafo bipartito $\mathcal{M}(G)$ è una matroide bipartita.
- Se G è un grafo pari, $\mathcal{M}^*(G)$ è bipartita.

· Def Una matroide si dice Euleriana se il suo insieme base E si può scrivere come unione disgiunta di circuiti di M.

Esempi

- Se G è grafo pari allora $M(G)$ è Euleriana
- Se G è bipartito, $M^*(G)$ è Euleriano. (esercizio)
- Se $M = U_{m,n}$, i circuiti sono gli insiemi di cardinalità $m+1$, quindi M è Euleriano sse $(m+1) \mid n$.