Network Flow

GIANCARLO STABILE

Network Flow – Flusso di Rete

Un ramo della Teoria dei Grafi che si occupa dell'ottimazione di reti di flusso.

Una struttura su cui far viaggiare informazioni, dati…

Studia come utilizzare al meglio questi modelli di flusso per prendere decisioni in vari contesti applicativi:

- Sistemi di telecomunicazioni;
- Trasporti;
- Sistemi idraulici e/o sistemi meccanici;

Necessità: risolvere problemi decisionali modellizzandoli graficamente.

Esempi di Flussi

ESEMPIO

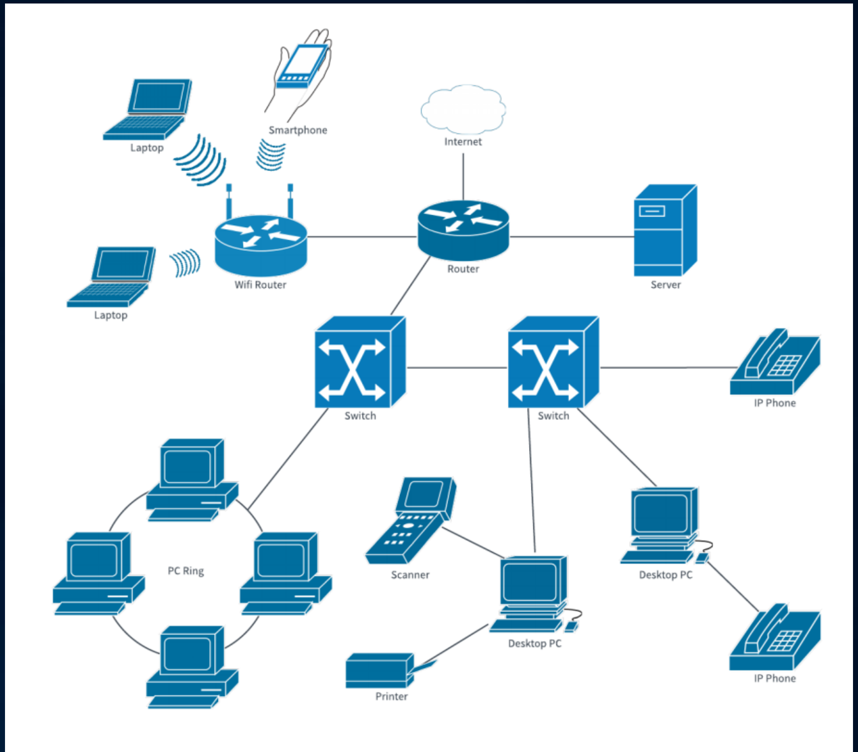
SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONI

DATI

- Dimensione pacchetto dati
- Connessioni con destinatario

OBIETTIVO

Trasferimento massimo di informazioni, riducendo perdita dati.

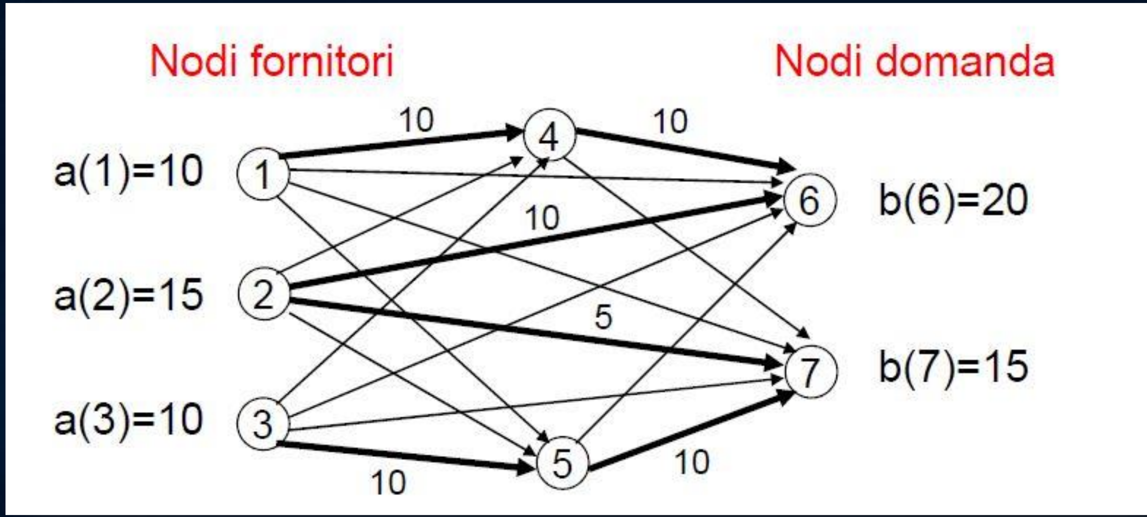


Esempi di Flussi

ESEMPIO TRASPORTO MERCI

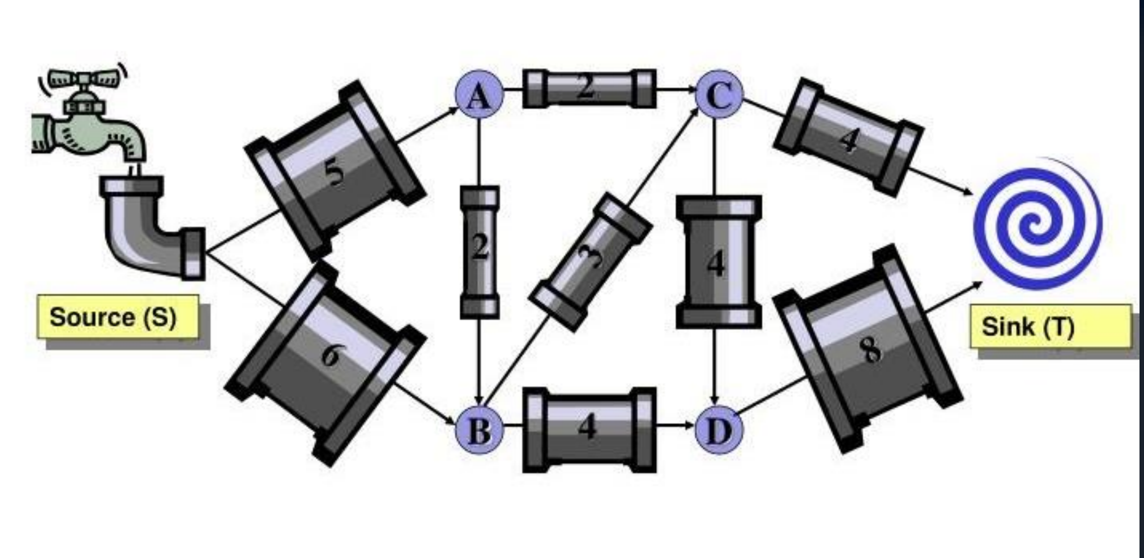
DATI
- Costo di stoccaggio
- Tragitti verso il magazzino

OBIETTIVO Costo minimo di produzione e stoccaggio.



Esempi di Flussi

ESEMPIO	SISTEMI IDRAULICI
DATI	• Capacità tubature • Direzione condutture
OBIETTIVO	Trasportare la maggior quantità d'acqua in ogni pozzo (sink).



Di cosa abbiamo bisogno?

ESEMPIO	DATI	OBIETTIVO
Sistemi di Telecomunicazione	• Dimensione • Connessioni	Massimo trasferimento
Trasporto Merci	• Costi • Percorsi	Costo minimo
Sistemi Idraulici	• Capacità • Direzioni	Riempire ogni pozzo

NECESSITIAMO:

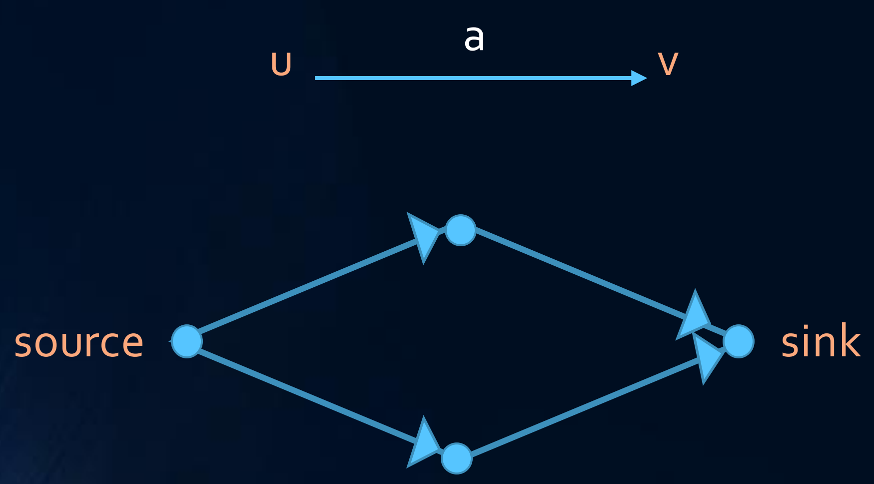
- Direzioni ⇒ Grafi Orientati
- Capacità ⇒ Grafi pesati
- Tragitti ⇒ Cammini

SCOPO:

- Trovare il Flusso Massimo
- Minimizzare perdite dati

Definizioni e richiami

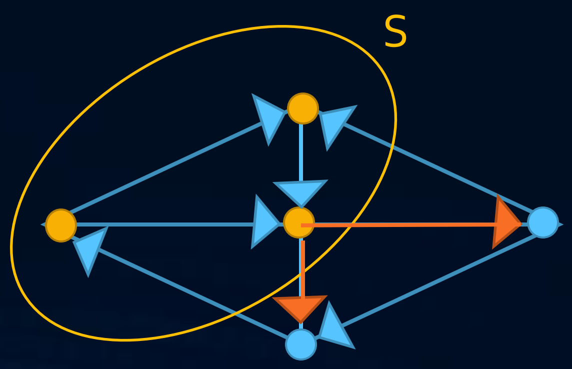
- Un Grafo Orientato (Digrafo) è una terna D= $(V(D), A(D), \varphi_D)$ dove: V vertici, A archi e φ_D funzione di incidenza tale che associa ad ogni arco una coppia ordinata di vertici, ossia $\varphi_D(a) = (u, v)\ \ \forall a \in A(D)$.



u Coda
v Testa

$d_D^-(v)$ Numero archi con testa in v
$d_D^+(u)$ Numero archi con coda in u
Source $d_D^-(u)$=0
Sink $d_D^+(v) = 0$
Intermedi Tutti gli altri vertici

- Nei digrafi ha senso definire il taglio uscente di S: dato S ⊂ V, $\partial^+(S)$ è l'insieme degli archi con coda in S e testa in V \ S (similmente taglio entrante).



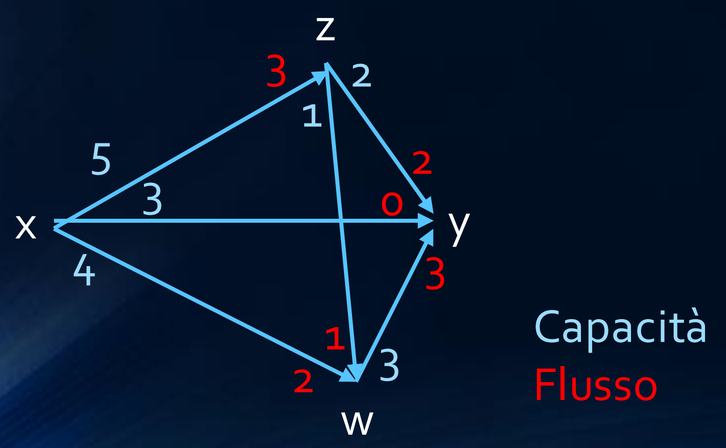
Network Flow

- Definiamo il Network come un digrafo pesato $N \coloneqq N(x,y)$ dove x e y sono rispettivamente il nodo source e sink.

- La capacità di un arco è una funzione $c(a)$ che associa ad ogni arco un valore reale positivo. (es. capacità tubature)

- Definiamo una funzione f a valori reali positivi in A in tal modo: $f(a)$ associa ad ogni a un reale positivo e se $S \subset A$ denotiamo la somma come $\sum_{a \in S} f(a) = f(S)$; inoltre se A è l'insieme degli archi del digrafo e X sottoinsieme dei vertici possiamo definire tale notazione: $f^+(X) \coloneqq f(\partial^+(X))$ e $f^-(X) \coloneqq f(\partial^-(X))$.
  La funzione f nel network è detta flusso ed è tale che:

  1. $0 \leq f(a) \leq c(a)\ \forall a \in A$
  2. $f^+(v)$=$f^-(v)\ \forall v \in V$



OSS:

- $f(a) = 0$ flusso nullo;
- $f(a) = c(a)$ sarà detto arco saturo
- $\forall\,(x,y) - flow \quad f^+(x) = f^-(y)$ tale numero è detto valore del flusso $val(f)$.
- Flusso Massimo se non esiste nessun altro flusso con valore più grande.

- **Prop.1** Per ogni flusso f in $N(x,y)$ e per ogni $X \subset V$ tale che $x \in X$ e $y \in V \backslash X$, si ha che $val(f) = f^+(X) - f^-(X)$.

  Dim.

  Per come abbiamo definito il flusso e il suo valore abbiamo: $f^+(v) - f^-(v) = \begin{cases} val(f) & se\ v = x \\ 0 & se\ v \in X \backslash \{x\} \end{cases}$

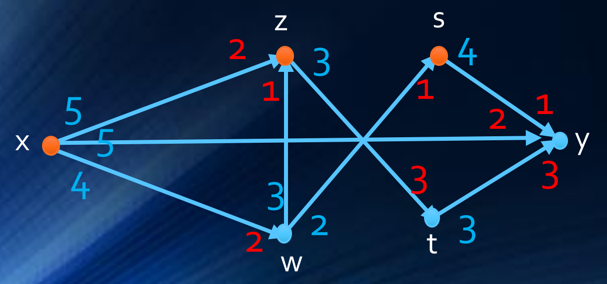
  Sommando entrambe le equazioni su X otteniamo $val(f) = \sum_{v \in X}\left(f^+(v) - f^-(v)\right) = f^+(X) - f^-(X)$ $\square$

- Definiamo un $(x,y) - taglio$ in $N(x,y)$ come un $\partial^+(X)$ uscente tale che $x \in X$ e $y \in V \backslash X$ è quindi un insieme xy-separatore.

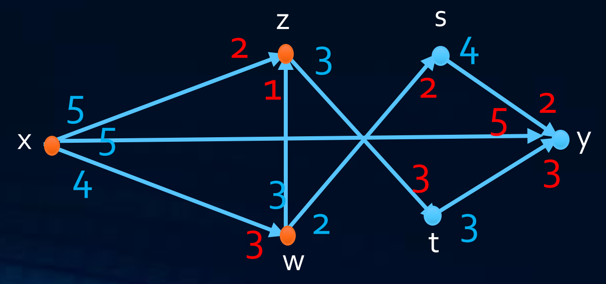
- La capacità di un taglio $K = \partial^+(X)$ è la somma delle capacità degli archi in K, la denoteremo con $cap(K)$.

- **Teorema.1** Per ogni flusso f e per ogni taglio $K = \partial^+(X)$ in N vale $val(f) \leq cap(K)$. Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se ogni arco di $\partial^+(X)$ è f-saturo e ogni arco di $\partial^-(X)$ è f-nullo.

- **Corollario1** Sia f flusso e K taglio. Se $val(f) = cap(K)$, allora f è il flusso massimo e K un taglio minimo.



$val(f) = 6$
$X = \{x,z,s\}$
$K = \partial^+(X) = \{xy, xw, zt, sy\}$
$cap(K)$ =5+4+3+4=16



$val(f) = 10$
$X = \{x,z,w\}$
$K = \partial^+(X) = \{zt, xy, ws\}$
$cap(K) = 3 + 5 + 2 = 10$

Dim. Teorema.1

Per la proprietà 1 sappiamo che:

$$f^+(X) \leq c^+(X) \text{ e che } f^-(X) \geq 0.$$

Allora applicando la proposizione precedente otteniamo:

$$val(f) = f^+(X) - f^-(X) \leq c^+(X) = cap(K).$$

Abbiamo $val(f) = cap(K) \leftrightarrow f^+(X) = c^+(X)$ e ciò vale $\leftrightarrow \partial^+(X)$ è f-saturo e ogni arco di $\partial^-(X)$ è f-nullo $\square$

Dim. Corollario.1

P.A. Sia f^*un flusso massimo e K^*taglio minimo. Dal teorema appena dimostrato deve risultare che:

$$val(f) \leq val(f^*) \leq cap(K^*) \leq cap(K)$$

Ma per ipotesi sappiamo che $val(f) = cap(K)$, quindi entrambi i fattori sono uguali e ciò dimostra la tesi. $\square$

PROBLEMA

Dato una rete $N(x, y)$,trovare il flusso massimo da x a y.
Quindi dimostrare l'inverso del corollario, ossia: il valore del flusso massimo è uguale alla capacità del taglio minimo.

Max-flow Min-cut

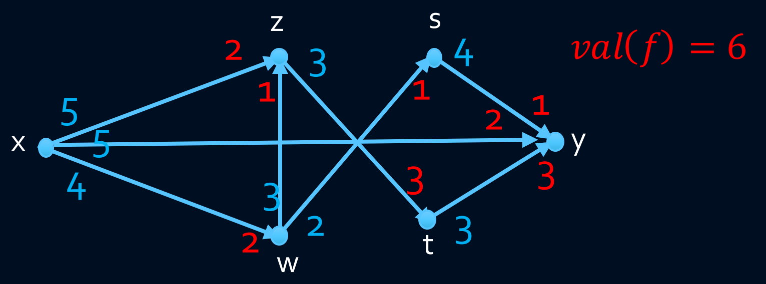
1955 Ford e Fulkerson

Ricercare il flusso massimo vuol dire andare ad incrementare il flusso iniziale in modo da ottenerne uno maggiore del precedente.

IDEA

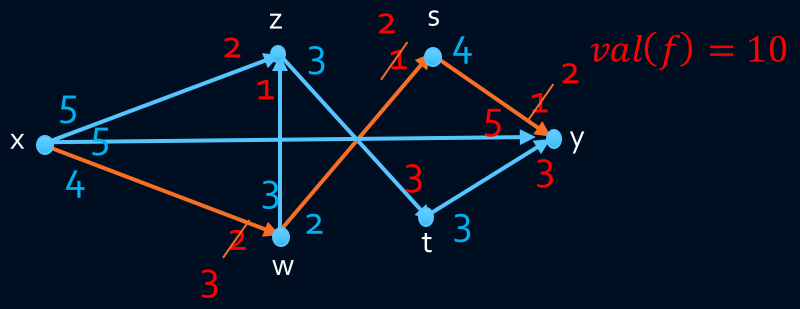
Incrementando ogni cammino che porta al nodo sink.

Cammino $f - incrementante$



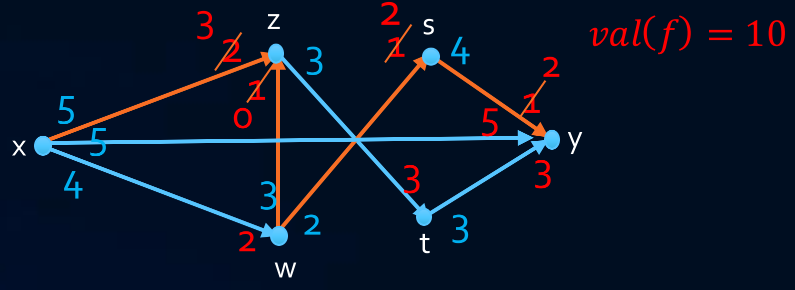
- Dato un cammino P gli associamo un valore $\varepsilon(P)$ definito in questo modo:

$$\varepsilon(P) = \min\{\varepsilon(a) | a \in A(P)\} \quad \text{dove} \quad \varepsilon(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & se\ a\ \text{è}\ arco\ diretto \\ f(a) & se\ a\ \text{è}\ arco\ inverso \end{cases}$$



- Un cammino incrementante consente di aumentare il flusso dell'arco considerato

in questo modo: $$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \varepsilon(P) & se\ a\ \text{è}\ arco\ diretto \\ f(a) - \varepsilon(P) & se\ a\ \text{è}\ arco\ inverso \\ f(a) & altrimenti \end{cases}$$



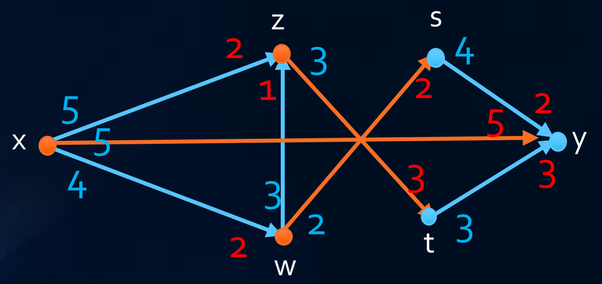
OSS:
La ricerca termina se gli archi entranti in y, o immediatamente prima, sono saturi.

- **Teorema.2** In ogni network $N(x, y)$ il valore del massimo flusso è uguale alla capacità del taglio minimo.

- **Prop.2** Sia f un flusso in un network N. Se c'è un cammino P $f-incrementante$, allora f non è un flusso massimo. Più precisamente la funzione f'(nuovo flusso) avrà valore $val(f') = val(f) + \varepsilon(P)$.

$\square$

- **Prop.3** Sia f un flusso in un network N e supponiamo che non ci siano cammini $f-incrementanti$. Sia X insieme dei vertici raggiungibili da x tramite cammini $f-insaturi$ e $K = \delta^+(X)$. Allora f è un flusso massimo in N e K un taglio minimo.



$\boldsymbol{X = \{x, z, w\}}$
$\boldsymbol{K = \delta^+(X) = \{xy, ws\}}$
$\boldsymbol{cap(K) = 5 + 2 + 3 = 10}$

Dim. **Prop.3**
Chiaramente $x \in X$ e $y \in V\backslash X$, perché non ci sono cammini incrementanti e quindi K è un taglio. Consideriamo $a \in \partial^+(X)$ con coda u e testa v, visto che $u \in X$ allora esiste un cammino Q $(x - u)$ insaturo per ipotesi.
P.A. a è insaturo allora il cammino Q lo comprenderebbe, ma la testa $v \in V\backslash X$ e cosi facendo non ci sarebbe tale cammino per come definito. Quindi a è saturo. Similmente si mostra che se $a \in \partial^-(X)$ allora è un $f - nullo$.
Dal Teo.1 si ha $val(f) = cap(K)$. Il corollario.1 implica quindi che f è un flusso massimo e K un taglio minimo. $\square$

Dim. Teorema.2
Sia f un flusso massimo, per la **Prop.2** non ci possono essere cammini incrementanti e quindi la dimostrazione segue dalla **Prop.3** . $\square$

⬇

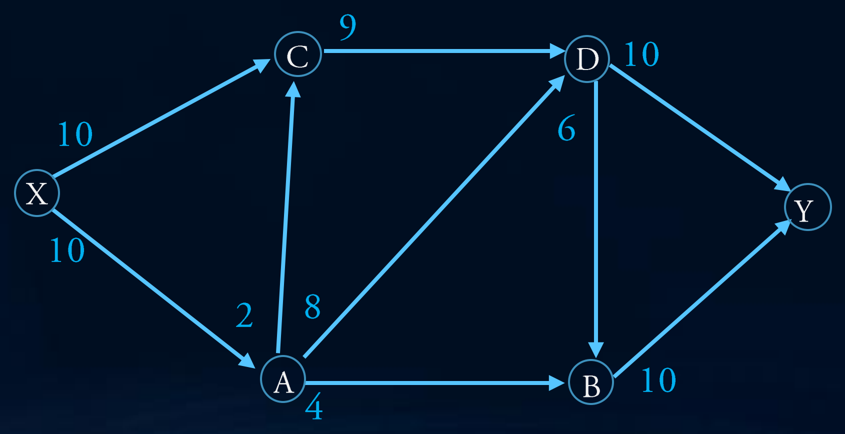
➢ Teorema. Ford & Fulkerson Un flusso f è un flusso massimo $\Leftrightarrow$ non ci sono cammini $f - incrementanti$.

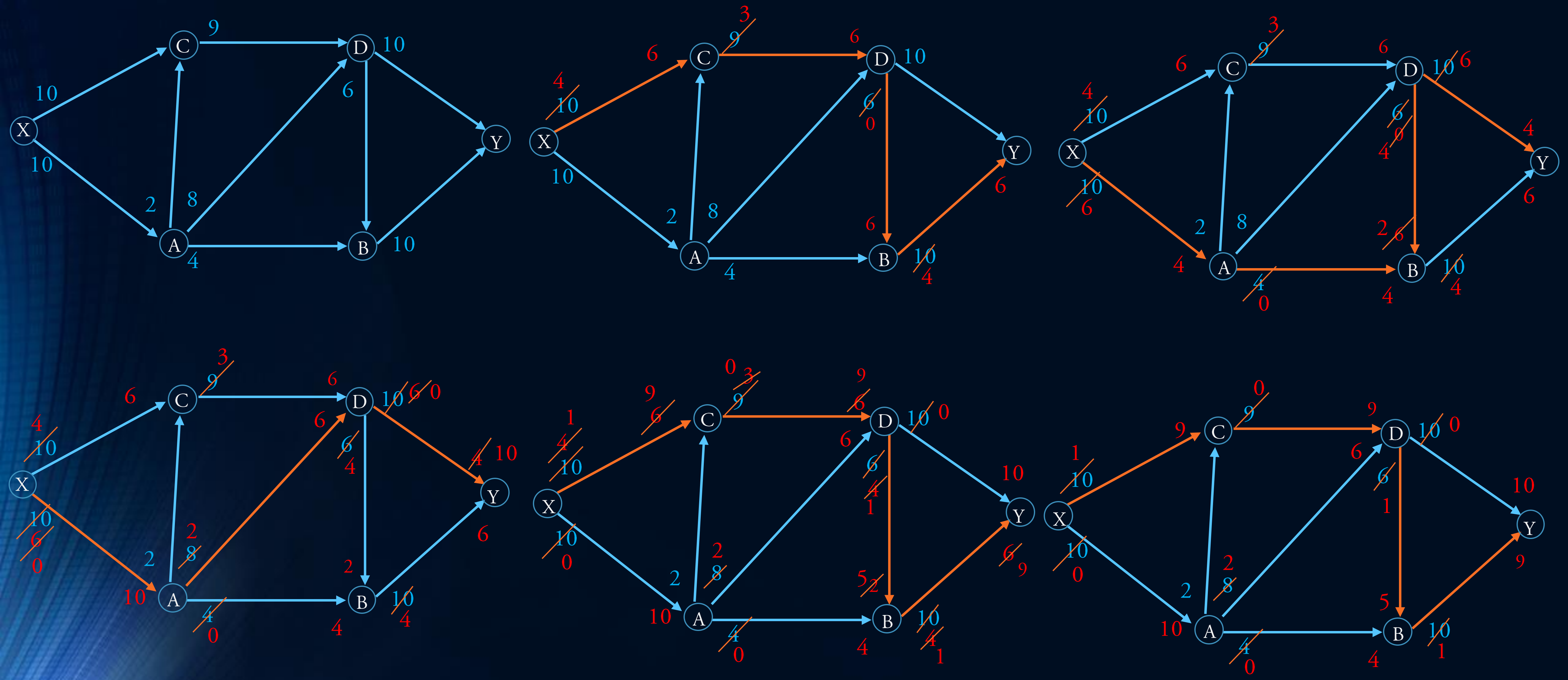
Algoritmo di Ford-Fulkerson

INPUT: Dato un network $N(x, y)$ con capacità e direzioni.
OUTPUT: Flusso Massimo e Taglio Minimo.

ITERAZIONI: Fintantoché non ci sono più cammini incrementanti:

1) Cercare cammino incrementante P;
2) Calcolare l'aumento $\varepsilon(P)$;
3) Aggiornare il flusso di ogni arco di P;





Flusso Massimo $val(f) = 19$

Taglio Minimo $X = \{X, C\}$

$cap(\delta^+(X)) = 19$

Bibliografia

- **J. A. Bondy, U.S.R. Murty**: *Graph theory,* Springer GTM 244.R
- R. Wilson: I*ntroduction to Graph theory*, Prentice Hall

Sitografia

- *Problemi di Network Flow* **Massimo Paolucci**
- *Teoria dei Grafi* **Paolo Detti**
- ***Ford-Fulkeron*** **Michael Sambol** (Youtube)